

תרגיל 12 – אלגברה מופשטת 1

1. ענו על הסעיפים הבאים:

1.1. מצאו את מספר האוטומורפיזמים של Z_6 ושל Z_{25} ;

1.2. מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $Z_{25} \times Z_8$;

1.3. זהו את החבורה $Aut\left(\frac{GL_n(Z_7)}{SL_n(Z_7)}\right)$ (לכל $n > 0$).

2. תהא G חבורה כך ש- $|G| = p^k$ עבור p ראשוני. תהא $H \triangleleft G$ כך ש- $|H| = p$. הוכיחו באמצעות משפט N/C כי $H \subseteq Z(G)$. (שימו לב כי כבר פתרנו את התרגיל הזה בעבר בדרך אחרת).

3. ענו על הסעיפים הבאים:

3.1. הוכיחו $Aut(S_3) \cong S_3$.

3.2. חשבו את $Aut(Aut(Aut(Z_8)))$.

4. תהי G חבורה ותהי N תת חבורה נורמלית. הוכיחו כי המרכז $C_G(N)$ הוא תת חבורה נורמלית של G .

5. תהי G חבורה מסדר 255.

5.1. הוכיחו שיש לה איבר מסדר 17.

5.2. הראו שכל איבר מסדר 17 בחבורה הוא מרכזי (כלומר שייך למרכז $Z(G)$). רמז: השתמשו במשפט N/C .

6. ענו על הסעיפים הבאים:

6.1. הוכיחו שאין שיכון של S_7 ב- A_8 .

6.2. תארו שיכון של S_7 ב- A_9 .

7. הוכיחו שלא קיימת חבורה פשוטה מסדר 400.

הדרכה: אם יש תת חבורה 5-סילו יחידה סיימנו. הוכיחו כי אם כל שתי תת חבורות 5-סילו נחתכות באופן טרוויאלי אז ת"ח 2 סילו היא נורמלית. אם P, Q תת חבורות 5-סילו הנחתכות באופן לא טרוויאלי, התבוננו בחבורה $\langle P, Q \rangle$ הנוצרת על ידם.

בהצלחה! ☺

