אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 1

21 באוקטובר 2020

1. רשמו את המספרים הבאים בצורה $z=a+bi$, מצאו את $Im(z), Re(z), \overline{z}, |z|$, ומקמו את z על הצירים. הערה: לא להיבהל משברים ושורשים....

(א) $(3-5i)^{-1}$

(ב) $(\sqrt{5}i)^{-1}$

(ג) 4^{-1}

(ד) $\frac{3-3i}{4+3i}$

(ה) $\frac{-5-i}{4-5i}$

<u>פתרון:</u>

א. נקבל מהנוסחא $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ אצלנו:

$$z=(3-5i)^{-1}=\frac{\overline{3-5i}}{|3-5i|^2}=\frac{3+5i}{(\sqrt{3^2+(-5)^2})^2}=\frac{3+5i}{(\sqrt{34})^2}=\frac{3}{34}+\frac{5}{34}i$$

ולכן: $Im(z)=\frac{5}{34}, Re(z)=\frac{3}{34}, \overline{z}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i, |z|=\frac{1}{|z^{-1}|}=\frac{1}{\sqrt{34}}$.

ב. כנל:

$$z=(\sqrt{5}i)^{-1}=\frac{\overline{\sqrt{5}i}}{|\sqrt{5}i|^2}=\frac{-\sqrt{5}i}{(\sqrt{\sqrt{5}^2})^2}=\frac{-\sqrt{5}i}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}i$$

ולכן : $Im(z)=-\frac{\sqrt{5}}{5}, Re(z)=0, \overline{z}=\frac{\sqrt{5}}{5}, |z|=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

ג. זהו המספר הממשי $\frac{1}{4}$, וזו גם ההצגה שלו כמרוכב. נקבל: $Im(z)=0, Re(z)=\frac{1}{4}, \overline{z}=\frac{1}{4}, |z|=\frac{1}{4}$.

ד. נכפיל בצמוד למכנה:

$$z=\frac{3-3i}{4+3i}=\frac{3-3i}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}=\frac{12-9i-12i-9}{16+9}=\frac{3-21i}{25}=\frac{3}{25}-\frac{21}{25}i$$

ולכן: $Im(z)=\frac{21}{25}, Re(z)=\frac{3}{25}, \overline{z}=\frac{3}{25}+\frac{21}{25}i, |z|=\sqrt{(\frac{3}{25})^2+(-\frac{21}{25})^2}=\sqrt{\frac{9+441}{625}}=\sqrt{\frac{450}{625}}$.

ה. כנל:

$$z=\frac{-5-i}{4-5i}=\frac{-5-i}{4-5i}\cdot\frac{4+5i}{4+5i}=\frac{-20-25i-4i+5}{41}=\frac{-15-21i}{41}=-\frac{15}{41}-\frac{21}{41}i$$

ולכן: $Im(z) = -\frac{21}{41}, Re(z) = -\frac{15}{41}, \overline{z} = -\frac{15}{41} + \frac{21}{41}, |z| = \sqrt{(-\frac{15}{41})^2 + (-\frac{21}{41})^2} = \sqrt{\frac{666}{1681}}$.

2. חשבו את השורשים הבאים:

(א) $\sqrt{i}$

(ב) $\sqrt{7+24i}$

(ג) $\sqrt{-5-12i}$

<u>פתרון:</u>

א. נסמן את השורש ב $z = a+bi$, לכן $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = i$.
ומכאן להשוואת מקדמים הנותנת לנו שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

כלומר,

$$\begin{cases} a^2 = b^2 \\ ab = \frac{1}{2} \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $a^2b^2 = \frac{1}{4}$ אבל הצבה במשוואה הראשונה תתן לנו $a^4 = \frac{1}{4}$ מה שאומר $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ולכן (משוואה שניה) $b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. כלומר, $z = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$.

ב. כאן נקבל שתי משוואות בשני נעלמים הבאות:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = 24 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b = \frac{12}{a}$, נציב במשוואה הראשונה ונקבל $a^2 - (\frac{12}{a})^2 = 7 \Rightarrow a^4 - 7a^2 - 144 = 0$. פתרונות המשוואה הדו ריבועית הזו הם: $a^2 = 16$ או $a^2 = -9$ שלא אפשרי. לכן נקבל $a = \pm 4$, ובהתאמה $b = \pm 3$. בסה"כ: $z = \pm(4+3i)$.

ג. בדומה נקבל:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = -12 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b = \frac{-6}{a}$, נציב במשוואה הראשונה ונקבל $a^2 - (\frac{-6}{a})^2 = -5 \Rightarrow a^4 + 5a^2 - 36 = 0$. פתרונות המשוואה הדו ריבועית הזו הם: $a^2 = 4$ או $a^2 = -9$ שלא אפשרי. לכן נקבל $a = \pm 2$, ובהתאמה, $a = 2 \Rightarrow b = -3, a = -2 \Rightarrow b = 3$ (מסמנים את זה $b = \mp 3$, קודם המינוס ואז הפלוס...). בסה"כ: $z = \pm(2-3i)$.

3. פתרו את המשוואות הבאות:

(א) $z^2+(4+i)z+5+5i$

(ב) $2z^2-(12+i)z+17=0$

פתרון:

א. לפי נוסחת השורשים נקבל:

$$z_{,2}=\frac{-4-i\pm\sqrt{(4+i)^2-4(5+5i)}}{2}=\frac{-4-i\pm\sqrt{16+8i-1-20-20i}}{2}=\frac{-4-i\pm\sqrt{-5-12i}}{2}$$

כעת, לפי שאלה 2 סעיף ג נקבל $\sqrt{-5-12i}=\pm2-3i$, ולכן:

$$z_{1,2}=\frac{-4-i\pm(2-3i)}{2}\Rightarrow z_1=-1-2i,z_2=-3+i$$

ב. לפי נוסחת השורשים נקבל:

$$z_{1,2}=\frac{12+i\pm\sqrt{(12+i)^2-4\cdot2\cdot17}}{4}=\frac{12+i\pm\sqrt{144+24i-1-136}}{4}=\frac{12+i\pm\sqrt{7+24i}}{4}$$

כעת, לפי שאלה 2 סעיף ב נקבל $\sqrt{7+24i}=\pm4+3i$, ולכן:

$$z_{1,2}=\frac{12+i\pm(4+3i)}{4}\Rightarrow z_1=4+i,z_2=2-\frac{1}{2}i$$

4. מצאו מספר מרוכב z המקיים: $|z|=12,Im(\overline{z})=-9.5$.

פתרון:

מהנתונים נקבל: $b=9.5,\sqrt{a^2+90.25}=12\Rightarrow a^2=144-90.25=53.75\Rightarrow$ $a=\pm\sqrt{53.75}$. בקשו למצוא מספר אחד, לכן ניקח את השורש החיובי ונקבל: $z=\sqrt{53.75}+9.5i$.

5. נניח שאנחנו מסמנים במישור המרוכב את כל המספרים z המקיימים $z+\overline{z}=8$. מה נקבל?

פתרון:

נקבל מהמשוואה ש $2Re(z)=8\Rightarrow Re(z)=4$. כלומר, אם נחזור לסימון הרגיל $z=a+bi$, נקבל ש־$a=4$, ו־b יכול להיות מה שאנחנו רוצים. נקבל את הישר האנכי לציר ה־$Re(z)$ (הלא הוא ציר ה־x) בנקודה $(4,0)$.

בהצלחה!