תרגיל 6 בחשבון אינפי 2 למדמ"ח

תאריך הגשה: 25.6.15

1. לכל אחת מסדרות הפונקציות הבאות בדקו לאיזה פונקציה גבולית היא מתכנסת נקודתית בתחום המתאים והאם ההתכנסות היא במידה שווה.

א. $f_n(x)=\frac{1}{1+2^n x^n},\ x\in[1,2]$.

ב. $f_n(x)=\frac{1}{1+2^n x^n},\ x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$.

ג. $f_n(x)=nxe^{-n^2x},\ x\in[0,\infty)$.

ד. $f_n(x)=x^n e^{-n^2x},\ x\in(0,\infty)$.

ה. $f_n(x)=n\sin\left(\frac{x}{n}\right),\ x\in(-\infty,\infty)$.

ו. $f_n(x)=(1-x)^{\frac{1}{2n+1}},\ x\in[0,2]$.

2. בדקו האם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים במידה שווה בתחום המתאים.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin^n(x),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{n}},\ x\in[0,1]$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n},\ x\in[0,2)$.

3. א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx^2}$ מתכנס ושטור הנגזרות שלו מתכנס במידה שווה בקטע $[1,2]$ ובעזרתו חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$.

ב. הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{n!}$ מתכנס ושטור הנגזרות שלו מתכנס במידה שווה בקטע $[0,2]$ ובעזרתו חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{(n-1)!}$. רמז: מהו טור החזקות של של e^{1-x^2}?

4. הוכיחו את הזהות

$$\frac{\arctan(t)}{2}+\frac{t}{2t^2+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)t^{2n+1}}{2n+1}\left(=t-\frac{2t^3}{3}+\frac{3t^5}{5}-...\right)$$

כאשר $0\le t<1$ לפי השלבים הבאים:

א. הוכיחו את הזהות $\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=1-2x^2+3x^4-4x^6+...$ כאשר $0\le x<1$.

רמז: השתמשו בפיתוח של טור חזקות ידוע ואז השתמשו בגזירה איבר איבר.

ב. הוכיחו שעבור $0\le t<1$ קבוע טור הפונקציות בסעיף א מתכנס במידה שווה בתחום $0\le x\le t$.

ג. הוכיחו שניתן להשתמש במשפט האינטגרציה איבר איבר עבור הטור בסעיף א כאשר $0\le x\le t$ והשתמשו בזהות שהוכחנו בתירגול:

$$I_{m+1}=\frac{x}{2m\left(1+x^2\right)^m}+I_m\frac{2m-1}{2m},\ I_m=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^m}.$$