פתרון תרגיל בית 5 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ט

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

1. הגדרה: פעולה של חבורה G על קבוצה X תיקרא טרנזיטיבית אם לכל $x_1, x_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש- $g * x_1 = x_2$

   קבעו האם הפעולות הבאות טרנזיטביות או לא:

   (א) פעולת הכפל משמאל של חבורה על עצמה.

   (ב) פעולת ההצמדה של חבורה על עצמה.

   (ג) הפעולה של S_n על $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$.

   (ד) הפעולה של S_n על $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

   פתרון:

   (א) טרנזיטיבית.

   (ב) לא טרנזיטיבית - למשל ב S_n הצמדה שומרת על מבני המחזורים.

   (ג) לא טרנזיטיבית - הפעולה רק משנה את האינדקסים לכן למשל, אין איבר ב $g \in S_n$ כך ש $g * x_1 x_1 = x_1 x_2$.

   (ד) טרנזיטיבית.

2. תהי קבוצה $X = \{a, b\}$. הוכיחו שיש שתי פעולות שונות של $\mathbb{Z}_2$ על X. מי מהן טרנזיטיבית?

   פתרון:

   ישנן בדיוק שתי פעולות. האחת, הפעולה הטריוויאלית המוגדרת לפי $g * a = a$, $g * b = b$ לכל $g \in \mathbb{Z}_2$. היא לא טרנזיטיבית, כי המסלול של a כולל רק את a.

   הפעולה השנייה היא "הפעולה שהופכת", המוגדרת לפי

   $$0 * a = a, \quad 0 * b = b, \quad 1 * a = b, \quad 1 * b = a$$

   והיא כן טרנזיטיבית.

3. יהיו $f\colon G\to H$ ו-$g\colon H\to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g\circ f\colon G\to K$ היא הומומורפיזם.

פתרון:

נתון שלכל $g_1,g_2\in G$ מתקיים $f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$, ושלכל $h_1,h_2\in H$ מתקיים $g(h_1h_2)=f(h_1)f(h_2)$. בפרט זה נכון עבור $h_i=f(g_i)$. לכן לכל $g_1,g_2\in G$ מתקיים

$$(g\circ f)(g_1g_2)=g(f(g_1g_1))=g(f(g_1)f(g_1))=g(f(g_1))g(f(g_1))=(g\circ f)(g_1)(g\circ f)(g_2)$$

ולכן $g\circ f$ הומומורפיזם.

4. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

(א) כל תת־חבורה נורמלית היא אבלית.

(ב) כל תת־חבורה אבלית היא נורמלית.

(ג) התמונה של כל הומומורפיזם $f\colon G\to H$ היא תת־חבורה נורמלית של H.

פתרון:

(א) למשל $SL_2(\mathbb{R})$ אינה אבלית, אבל היא נורמלית ב-$GL_2(\mathbb{R})$.

(ב) למשל $\langle\tau\rangle$ היא תת־חבורה אבלית של D_4 שאינה נורמלית.

(ג) למשל בשיכון הטבעי $f\colon\ \langle\tau\rangle\to D_4$ התמונה היא לא תת־חבורה נורמלית.

שאלות רגילות

1. תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $e\neq x\in G$ מתקיים $x^{-1}\notin\mathrm{conj}(x)$ (כלומר ההופכי של x לא שייך למחלקת הצמידות של x).

פתרון:

נניח בשלילה כי $x^{-1}\in\mathrm{conj}(x)$. כלומר x צמוד להופכי שלו, ולכן קיים $g\in G$ כך ש-$gxg^{-1}=x^{-1}$. נצמיד את המשוואה האחרונה שוב ב-g ונקבל

$$g^2xg^{-2}=gx^{-1}g^{-1}=\left(gxg^{-1}\right)^{-1}=x$$

ולכן $g^2x=xg^2$. החבורה G היא סופית מסדר אי זוגי, ולכן הסדר של g הוא אי זוגי, נניח $o(g)=2m+1$. לכן $e=g^{2m+1}=g\left(g^2\right)^m$, וקיבלנו כי $g^{-1}=\left(g^2\right)^m$. נציב זאת במשוואה $gxg^{-1}=x^{-1}$ ונקבל

$$x=g\left(g^2\right)^m x=gx\left(g^2\right)^m=x^{-1}$$

ולכן $x=x^{-1}$, שזו סתירה כי x אינו איבר היחידה ואין בחבורה איברים מסדר 2.

2. תהי G חבורה ותהי $S\subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה. נגדיר את הְמְרַכֵּז של S ב-G להיות

$$C_G(S)=\{g\in G\ |\forall s\in S, gs=sg\}$$

זו הכללה למושג מְרַכֵּז של איבר $s\in G$ שבכיתה סימנו $C_G(s)$.

(א) הוכיחו שאם $S \subseteq T \subseteq G$, אז $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.

(ב) הוכיחו

$$C_G(S) = \bigcap_{s\in S} C_G(s) = \bigcap_{s\in\langle S\rangle} C_G(s) = C_G(\langle S\rangle)$$

והסיקו כי $C_G(S) \leq G$.

(ג) תנו דוגמה לחבורה G ותת־קבוצה S כך ש-$|S| \geq 2$ וגם $S \subsetneqq C_G(S) \subsetneqq G$.
רמז: אפשר להסתפק ב-$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

(ד) תנו דוגמה לחבורה G ותת־קבוצה S כך ש-$|S| \geq 2$ וגם $C_G(S) \subsetneqq S \subsetneqq G$.
רמז: אפשר להסתפק ב-$G = S_3$ (אבל לא חייבים!)

פתרון:

(א) יהי $g \in C_G(T)$. אזי לכל $t \in T$ מתקיים $gt = tg$. מפני ש-$S \subseteq T$, אז בפרט לכל $t \in S$ מתקיים $gs = sg$. כלומר $g \in C_G(S)$, ולכן $C_G(T) \subseteq C_G(S)$.

i. נתחיל בהוכחת $C_G(S) = \bigcap_{s\in S} C_G(s)$:

$$g \in C_G(S) \Leftrightarrow \forall s \in S, gs = sg \Leftrightarrow \forall s \in S, g \in C_G(s) \Leftrightarrow g \in \bigcap_{s\in S} C_G(s)$$

וראינו בכיתה כי $C_G(s)$ הוא תת־חבורה, ושחיתוך תת־חבורות הוא תת־חבורה. לכן $C_G(S) \leq G$.

הוכחת $\bigcap_{s\in\langle S\rangle} C_G(s) = C_G(\langle S\rangle)$ נובעת ישירות מהחישוב הקודם כאשר מחליפים את S ב-$\langle S\rangle$ (שהרי גם $\langle S\rangle$ היא תת־קבוצה לא ריקה של G). מפני ש-$S \subseteq \langle S\rangle$, אז לפי הסעיף הקודם $C_G(\langle S\rangle) \subseteq C_G(S)$ ונותר לנו להוכיח את ההכלה בכיוון השני. יהי $g \in C_G(S)$, אזי הוא מתחלף עם כל איברי S. מכאן ש-g גם מתחלף עם כל חזקה של איברי S, כולל חזקות שליליות. יהי $s_1^{\pm1}\dots s_n^{\pm1} \in \langle S\rangle$ איבר כלשהו כאשר $s_1,\dots,s_n \in S$. אזי

$$gs_1^{\pm1}s_2^{\pm1}\dots s_n^{\pm1} = s_1^{\pm1}gs_2^{\pm1}\dots s_n^{\pm1} = \dots = s_1^{\pm1}\dots s_n^{\pm1}g$$

כי g מתחלף עם כל s_i או s_i^{-1}. לכן $g \in C_G(\langle S\rangle)$ וקיבלנו $C_G(S) = C_G(\langle S\rangle)$.

(ב) יש אינסוף תשובות אפשרויות כאן. כדי להבטיח $S \subsetneqq C_G(S)$ צריך לדאוג שכל איברי S מתחלפים עם כל איברי S (אם S הייתה תת־חבורה היינו אומרים כי S אבלית). נבחר $G = S_3$. אז אפשר לבחור $S = \{(123), (132)\}$. נשים לב כי $\langle S\rangle = \langle(123)\rangle$, וחישוב קצר יראה כי $C_G(S) = \langle(123)\rangle \neq S_3$. לכן $S \subsetneqq C_G(S) \subsetneqq G$.

(ג) גם כאן נבחר $G = S_3$. אפשר לבחור $S = \{(123), (12)\}$ או $S = S_3 \setminus \{\mathrm{id}\}$. במקרה זה $\langle S\rangle = G$. אז ראינו כי $C_G(S) = Z(G) = \{\mathrm{id}\}$. לכן $C_G(S) \subsetneqq S \subsetneqq G$.

3. הגדרה: דגל מלא של $V = \mathbb{R}^n$ הוא שרשרת של מרחבים וקטוריים

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$$

כאשר $\dim V_i = i$. נסמן ב-$\mathcal{B}$ את אוסף הדגלים המלאים של V.

(א) הוכיחו כי החבורה $GL_n(\mathbb{R})$ פועלת על $\mathcal{B}$ לפי

$$A * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n) = A \cdot V_0 \subset A \cdot V_1 \subset \cdots \subset A \cdot V_n$$

כאשר $A \cdot V_i = \{Av \mid v \in V_i\}$. בנוסף הראו שהפעולה הזו טרנזיטיבית.

(ב) מצאו את המייצב של הדגל הסטנדרטי $\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ כאשר $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. רמז: אינדוקציה על i.

פתרון:

(א) יהי $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ דגל ב-$\mathcal{B}$. לכל מרחב וקטורי V_i בדגל ולכל $v \in V_i$, איבר היחידה $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ מקיים כי $I_n v = v$. לכן $I_n \cdot V_i = V_i$. אנחנו יודעים שכפל מטריצות (כאשר הגדלים מתאימים) הוא קיבוצי ולכן לכל $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ מתקיים $A_1(A_2 v) = (A_1 A_2) v$. לכן גם $A_1(A_2 \cdot V_i) = (A_1 A_2) \cdot V_i$. לכן

$$\begin{aligned} A_1 * (A_2 * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n)) &= A_1 * (A_2 \cdot V_0 \subset A_2 \cdot V_1 \subset \cdots \subset A_2 \cdot V_n) \\ &= A_1(A_2 \cdot V_0) \subset A_1(A_2 \cdot V_1) \subset \cdots \subset A_1(A_2 \cdot V_n) \\ &= (A_1 A_2) \cdot V_0 \subset (A_1 A_2) \cdot V_1 \subset \cdots \subset (A_1 A_2) \cdot V_n \\ &= (A_1 A_2) * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n) \end{aligned}$$

וקיבלנו שאכן מדובר בפעולת חבורה על קבוצה. נותר להראות שהפעולה טרנזיטיבית. נסמן ב-F_e את הדגל הסטנדרטי

$$\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

מספיק להראות שלכל דגל $F \in \mathcal{B}$ יש $A \in GL_n(\mathbb{R})$ השולחת את F_e אל F (זה נכון לכל פעולה של חבורה, שאם ישנו איבר שהמסלול שלו הוא כל הקבוצה, אז המסלול של כל איבר הוא כל הקבוצה). יהי דגל

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

ב-$\mathcal{B}$ כך שלמרחב V_1 יש בסיס $\{b_1\}$ של וקטור עמודה, שאותו נשלים לבסיס $\{b_1, b_2\}$ של V_2, וכן הלאה באינדוקציה עד שנקבל בסיס $\{b_1, \dots, b_n\}$ של V. הרי לפי הגדרה $\dim V_i = i$ ואנחנו יודעים שאפשר להשלים קבוצה בלתי תלויה לינארית של $i-1$ וקטורים ב-V_i לבסיס בן i איברים. המטריצה A המבוקשת היא מטריצת מעבר בין הבסיס הסטנדרטי לבסיס $\{b_1, \dots, b_n\}$. באופן מפורש

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ונקבל $V_i = \langle b_1, \dots, b_i \rangle = A \cdot \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ לכל i.

(ב) תהי $A \in \mathrm{stab}(F_e)$. לכן $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = A \cdot \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ לכל i. הדרישה $A \cdot \langle e_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$ משמעה שהעמודה הראשונה של A היא $(r_1, 0, \dots, 0)$ עבור $r_1 \in \mathbb{R}^*$ (למה $r_1 \neq 0$? כי A הפיכה). כעת מהדרישה $A \cdot \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$

נקבל שהעמודה השנייה של A היא מן הצורה $(r_2', r_2, 0, \ldots, 0)$ עבור $r_2 \in \mathbb{R}^*$ ו-$r_2' \in \mathbb{R}$. מכאן ברור שצריך להמשיך באינדוקציה על n, המימד של V.

נוכיח באינדוקציה על n ש-$\mathrm{stab}(F_e)$ הוא תת־החבורה של המטריצות המשולשיות העליונות ההפיכות. בסיס האינדוקציה עשינו לעיל. נניח את נכונות הטענה עבור $n-1$. כלומר לכל $1 \leq i \leq n-1$ מתקיים $A \cdot V_i = V_i$. נשאר להוכיח $A \cdot V_n = V_n$. ניתן להניח כי

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} r_1 & * & * & * & a_1 \\ 0 & r_2 & * & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{i-1} & a_{n-1} \\ \hline b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & r_n \end{array}\right)$$

כאשר $r_i \in \mathbb{R}^*$, $* \in \mathbb{R}$ לפי הנחת האינדוקציה, ואנו נדרשים למצוא את איברי השורה והעמודה האחרונות. אם $b_i \neq 0$ נקבל סתירה לכך ש-$A\cdot\langle e_1, \ldots, e_i\rangle = \langle e_1, \ldots, e_i\rangle$. לכן $b_i = 0$ לכל i, וכדי להבטיח ש-A הפיכה נדרוש $r_n \in \mathbb{R}^*$. עבור כל $1 \leq i \leq n-1$ אין שום מגבלה על a_i, שכן אם $v \in V_n$, אז $Av \in \mathbb{R}^n = V_n$, ואם $v \in V_j$ עבור $j < n$, אז $Av \in V_j$ כי בפיתוח המכפלה Av נקבל כי $n-j$ האיברים התחתונים הם 0 (כלומר $a_{n-j}, \ldots, a_n$ לא משפיעים כאן כלל). ביתר פירוט: אם $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_j e_j$, אז אפשר לבדוק לכל מחובר $A\alpha_i e_i \in V_j$ בנפרד. מכאן ש-A מטריצה משולשית עליונה והפיכה, כדרוש.

.4 .

(א) מצאו את כל מחלקות הצמידות של D_4.

רמז: יש הרבה דרכים למצוא אותן, מבלי לחשב לכל איבר בנפרד לפי הגדרה. למשל אפשר להעזר בזה שכל איבר ניתן לכתוב בצורה $\tau^i\sigma^j$ או בכך שאתם כבר מכירים תת־חבורה נורמלית של D_4.

(א) תנו דוגמה לחבורה G, לתת־חבורה $H \leq G$ ולשני איברים $x, y \in H$ שהם צמודים ב-G, אבל אינם צמודים ב-H. רמז: הביטו למעלה.

פתרון:

(א) יש חמש מחלקות צמידות:

$$\{id\}\,,\ \left\{\sigma, \sigma^3\right\}\,,\ \left\{\sigma^2\right\}\,,\ \{\tau, \tau\sigma\}\,,\ \left\{\tau\sigma, \tau\sigma^3\right\}$$

אפשר לחשב רשימה זו בעזרת כמה שיטות. למשל אפשר לחשב ש-$Z(D_4) = \left\langle\sigma^2\right\rangle$ ומחלקת הצמידות של כל איבר מרכזי מכילה את אותו איבר בלבד, ושאר האיברים שייכים למחלקות צמידות עם יותר מאיבר אחד. כדי לראות למי σ צמוד ננסה להצמיד באיבר מן הצורה $\tau^i\sigma^j$. אם i זוגי, אז נקבל $\sigma^j\sigma\sigma^{-j} = \sigma$, ואם i אי זוגי נקבל

$$\tau\sigma^j\sigma\left(\tau\sigma^j\right)^{-1} = \tau\sigma^j\sigma\sigma^{-j}\tau = \tau\sigma\tau = \sigma^{-1}\tau\tau = \sigma^3$$

או בדרך אחרת לפיה $\langle\sigma\rangle$ נורמלית ב-D_4, ולכן איחוד של מחלקות צמידות של D_4. אבל id במחלקת צמידות משל עצמו, ואילו σ לא מרכזי. כך אפשר להמשיך לשאר מחלקות הצמידות.

(ב) נבחר $G = D_4$ ואת $H = \langle\sigma\rangle$. מפני ש-H ציקלית, אז היא אבלית ולכן מחלקת הצמידות של כל איבר $x \in H$ היא $\{x\}$. אבל אם נבחר $\sigma, \sigma^3 \in H$ לפי החישוב בסעיף הקודם ראינו שהם צמודים ב-G.

האם אפשר לבחור את H להיות לא אבלית? כן, אבל לא עבור $G = D_4$.

5. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם.

הוכיחו שאם G אבלית, אז גם $\mathrm{im}f$ אבלית. הפריכו את הכיוון השני.

פתרון:

(א) לכל $h_1, h_2 \in \mathrm{im}f$ קיימים $g_1, g_2 \in G$ כך ש-$f(g_i) = h_i$. נחשב

$$h_1h_2 = f(g_1)f(g_2) \overset{\star}{=} f(g_1g_2) \overset{*}{=} f(g_2g_1) \overset{\star}{=} f(g_2)f(g_1) = h_2h_1$$

כאשר בשיוויון המסומן $*$ השתמשנו באבליות של G, ובשיוויונות המסומנים $\star$ השתמשנו בכך ש-f הומומורפיזם. כלומר כל זוג איברים ב-$\mathrm{im}f$ מתחלפים, ולכן $\mathrm{im}f$ אבלית.

כדי להפריך חייבים לבחור חבורה לא אבלית. אנחנו נבחר את $G = S_3$. עבור H אפשר לבחור כל חבורה. למשל $H = \mathbb{Z}_5$. אז עבור ההומומורפיזם הטריוויאלי $f\colon S_3 \to \mathbb{Z}_5$ השולח כל איבר ל-0, נקבל $\mathrm{im}f = \{0\}$. כמובן שזו חבורה אבלית, אבל S_3 לא.

6. נאמר שפעולה של חבורה G על קבוצה X, כך ש-$|X| > 2$, היא 2-טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים $x_1 \neq x_2 \in X$ ו-$y_1 \neq y_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ וגם $g * x_2 = y_2$.

הערה: השאלה נראית יותר מפחידה ממה שהיא. בעיקר צריך להבין את ההגדרה.

(א) הוכיחו שאם G פועלת 2-טרנזיטיבית על X אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

(ב) הוכיחו כי G פועלת 2-טרנזיטיבית אם ורק אם G פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $X \times X \setminus \Delta$, כאשר $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ והפעולה היא רכיב-רכיב.

(ג) הוכיחו כי A_4 פועלת 2-טרנזיטיבית על הקבוצה $\{1,2,3,4\}$.

(ד) יהי F שדה, ונניח $|F| > 2$. הוכיחו שהחבורה $GL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, אבל לא פועלת 2-טרנזיטיבית.

(ה) אם $|F| = 2$, הראו ש-$GL_2(F)$ כן פועלת 2-טרנזיטיבית.

פתרון:

(א) לכל שני איברים $x, y \in X$ ניקח איבר $x \neq z \in X$ (קיים כזה לפי הדרישה על הגודל של X).

נתבונן בזוגות $x \neq y$ ו-$x \neq z$. מכיוון שהפעולה היא 2-טרנזיטיבית יש $g \in G$ כך ש-$g * x = y$ (וגם $g * z = x$ אבל זה לא חשוב).

(ב) יהיו $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \setminus \Delta$ כלומר $x_1 \neq x_2$ ו-$y_1 \neq y_2$. אם הפעולה של G היא 2-טרנזיטיבית, אז קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ ו-$g * x_2 = y_2$. לכן

$$g * (x_1, x_2) = (g * x_1, g * x_2) = (y_1, y_2)$$

בכיוון השני, אם $x_1 \neq x_2$ ו-$y_1 \neq y_2$, אז $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \setminus \Delta$ וקיים $g \in G$ כך ש-$g * (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. כלומר $g * x_i = y_i$.

(ג) נסמן $X = \{1, 2, 3, 4\}$. תהי $\sigma \in A_4$. הפעולה של σ על $i \in X$ היא $\sigma * i = \sigma(i)$. לכל $(i, j), (k, l) \in X \times X \setminus \Delta$ אם $|\{i, j, k, l\}| = 4$ (כלומר כולם שונים), נבחר $\sigma = (ik)(jl) \in A_4$ ואז

$$\sigma * (i, j) = (\sigma(i), \sigma(j)) = (k, l)$$

אם $|\{i, j, k, l\}| = 3$ (כלומר יש בזוגות $(i, j), (k, l)$ איבר משותף אחד), אז בלי הגבלת הכלליות $i = k$ או $i = l$ וקיים $m \notin \{i, j, k, l\}$. אם $i = k$, נבחר את $\sigma = (jlm)$, ואם $i = l$ נבחר את $\sigma = (ikm)$.

לסיום, אם $|\{i, j, k, l\}| = 2$, אז יש שתי אפשרויות: או ש-$i = k, j = l$, ונבחר את $\sigma = \mathrm{id}$, או ש-$i = l, j = k$ ונבחר את $\sigma = (ij)(mm')$ עבור $m, m' \notin \{i, j, k, l\}$.

שימו לב שלכל $n \geq 4$ ניתן להרחיב הוכחה זו לכך ש-A_n פועלת 2-טרנזיטיבית על $\{1, 2, \ldots, n\}$.

(ד) בשביל טרנזיטיביות, מספיק להראות שיש וקטור שהמסלול שלו הוא כל $F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. נראה זאת עבור הוקטור $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$. יהי $v \in F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$ וקטור כלשהו, ונשלים אותו לבסיס (אפשר, כי הוא לא אפסי) $\{v, w\}$.

ידוע ממשפט ההגדרה (מאלגברה לינארית) שקיימת העתקה לינארית שמעבירה את $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ ל-v ואת $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ ל-w. מכיוון ש-$\{v, w\}$ הוא בסיס אז ההעתקה הזו היא הפיכה, ולכן המטריצה המייצגת שלה תהיה מ-$GL_2(F)$.

אגב, אפשר להראות שאפילו $SL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. נסו למצוא מטריצות מפורשות.

הפעולה היא לא 2-טרנזיטיבית, כי אי אפשר לשלוח שני וקטורים תלויים לינארית לשני וקטורים שאינם תלויים לינארית. למשל אם ניקח $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ ואת $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, עבור $\alpha \neq 0, 1$ (קיים α כזה כי $|F| > 2$). אז אין מטריצה A כך ש-$A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right)$ וגם $A\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ שכן

$$A\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right) = \alpha \cdot A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$$

(ה) אם $|F| = 2$, אז אפשר להוכיח $GL_2(F) \cong S_3$. הפעולה של $GL_2(F)$ על הקבוצה $F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$ היא למעשה הפעולה של S_3 על $\{1, 2, 3\}$, שהיא 2-טרנזיטיבית.

באופן יותר ישיר, אם בוחרים שני וקטורים $x_1 \neq x_2 \in F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$, אז נקבל בסיס של F^2. לפי קיום של מטריצות מעבר לכל בסיס אחר $y_1 \neq y_2 \in F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$, מקבלים שהפעולה היא 2-טרנזיטיבית.

שאלות אתגר

אם פתרתם את שאלות האתגר, ואין לשאלה פתרון, בבקשה שלחו לי את הפתרון שלהן.

1. יהי $\Psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ אופרטור מקבוצה סדורה חלקית $(\mathcal{L}, \leq)$ לעצמה.

(א) הוכיחו שאם Ψ מקיים את שני התנאים:

- לכל $A, B \in \mathcal{L}$, אם $A \leq B$ אז $\Psi(B) \leq \Psi(A)$.
- לכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $A \leq \Psi^2(A)$.

אז $\Psi^3 = \Psi$. כלומר שלכל $A \in \mathcal{L}$ מתקיים $\Psi(\Psi(\Psi(A))) = \Psi(A)$.

(ב) הסיקו שלכל תת־חבורה $H \leq G$ מתקיים $C_G(C_G(C_G(H))) = C_G(H)$.

בהצלחה!