תרגול 5

תרגיל (סיום תרגול) הוכחנו כי פונקצית רימן אינטגרבילית בקטע $[0,1]$

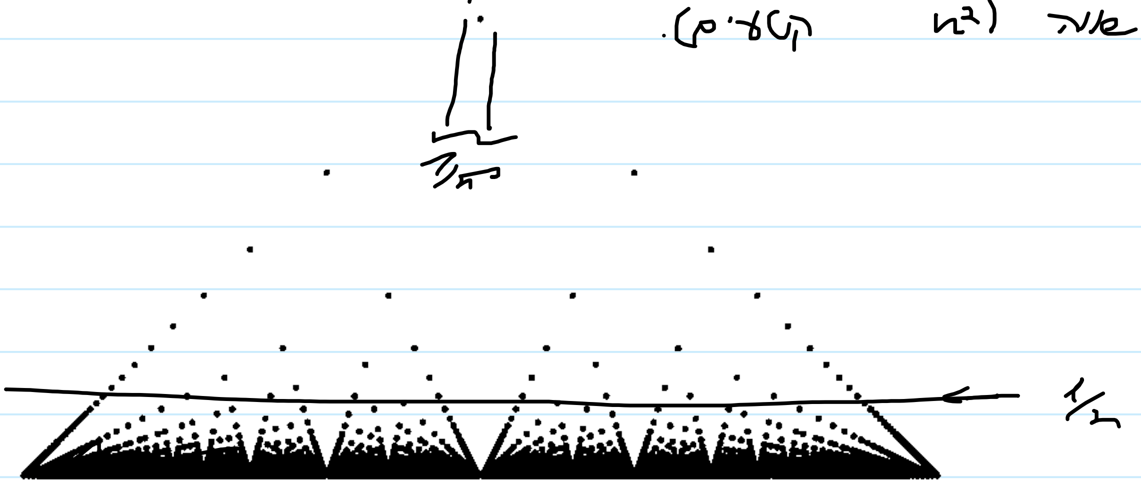
נזכר כי פונק' רימן מקבלת את הערך $1/n$ לכל היותר $n-1$ פעמים

$$\frac{1}{n} \longmapsto \frac{a}{n}.$$

נגדיר סדרת חלוקות באופן הבא:

$$T_n: 0, \frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, \dots, \frac{n^2}{n^2}=1$$

חלוקה שווה ל-n^2 קטעים.



$$\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\cdot 2 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}\cdot 3 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\overline{S}(f,T_n) \le \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\cdot (k-1)\cdot \frac{1}{n^2}\right) + \frac{n^2-n+1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}$$

גובה הפונקציה. מס' פעמים רוחב המלבן

עבור $n=4$:

הקטעים הבעייתיים:

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{16}$$

החלק התחתון:

$$\frac{16-3}{16}\cdot\frac{1}{4}$$

$\frac{16-5}{16} \circ \frac{1}{4}$

הקוץ הקטן:

$$\overline{S}(f,T_n) \le \frac{(n-1)}{n}\cdot(n-1)\frac{1}{n^2} + \frac{n^2-n+1}{n^3}$$

$$= \frac{n^2-2n+1}{n^3} + \frac{n^2-n+1}{n^3} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן האינטגרל העליון $\overline{\int_0^1} f = 0$

ובסה"כ $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ ולכן f אינטגרבילית.

משפט: פונקציה f אינטגרבילית אם ורק אם f חסומה ורציפה בכל מקום פרט אולי על קבוצה ממידה אפס (שבהם אולי היא לא רציפה)

אינטגרל מסוים לפי רימן.

הגדרות וסימונים

עבור הקטע $[a,b]$ חלוקה של הקטע: $T: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

n - מס' הקטעים בחלוקה.

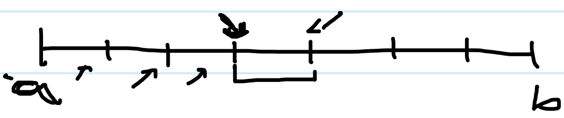
Δx_k - אורך הקטע $I_k = x_k - x_{k-1}$

בחלוקה שווה ל-n קטעים $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$. $[a,b]$

בכל קטע נבחר נקודה $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

למשל בחירת הקצה השמאלי של הקטע בחלוקה שווה:
$$\alpha_k = a + \frac{(b-a)}{n}(k-1)$$

למשל בחירת הקצה הימני בחלוקה שווה
$$\alpha_k = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)k$$



הגדרה: תהי f פונקציה בקטע $[a,b]$ ותהי T חלוקה של $[a,b]$ נגדיר את סכום רימן של f בקטע עם בחירת נקודות $\alpha_k \in I_k$

$$\sigma_T(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$$

בקטע $[a,b]$

הגדרה: נאמר של אינטגרל רימן אם מתקיים

$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma_T = I$ כלומר אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$

כך שלכל חלוקה T של הקטע $[a,b]$ עם $\lambda(T)<\delta$

ולכל בחירה של נק' $\alpha_k \in I_k$ מתקיים

$$|\sigma_T(\alpha_1,\dots,\alpha_n) - I| < \varepsilon$$

f חסומה +

משפט: f אינטגרבילית רימן $\Leftrightarrow$ f אינטגרבילית דרבו.

הערה: ניתן להוכיח באינדוקציה

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

תרגיל: תשבו את האינטגרל המסוים לפי רימן של $f=x^2$ בקטע $[1,3]$.

פתרון: נבחר חלוקה שווה של הקטע $[1,3]$

$$\Delta x_k = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

ונבחר $\alpha_k = 1 + \frac{2}{n}k$

$[1,3]$

11:09 20 April, 2021

$$f=x^2$$

וגם סכום רימן:

$$\sigma_T(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 1+\frac{4k}{n}+\frac{4k^2}{n^2}=\frac{2}{n}\cdot n+\frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=2+\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\xrightarrow{n\to\infty}$$

$$2+4+\frac{16}{6}=6+\frac{16}{6}$$

<u>הערה</u>: x^2 רציפה בקטע סגור ולכן
אינטגרבילית לפי דרבו המחמה ולכן אינטגרבילית
לפי רימן, כלומר, אנחנו יודעים שהיא אינטגרבילית
עכשיו חישבנו מהו האינטגרל