תרגול 10 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

דצמבר 2015

1 וקטורי קואורדינטות

הגדרה 1.1. יהי V מרחב וקטורי, יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס סדור של V (כלומר, אכפת לנו מהסדר שלו), ויהי $v \in V$. אזי קיימת דרך אחת ויחידה לכתוב

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

עבור $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. נגדיר את **וקטור הקואורדינטות** של v ביחס ל-B להיות

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

דוגמה 1.2. יהי $v = 3 + 5x - x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, ויהי $B = \{1, x, x^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$. וקטור הקואורדינטות שלו הוא

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 1.3. תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ויהי $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. אזי

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

אם ניקח את הבסיס $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, וקטור הקואורדינטות יהפוך להיות

$$[A]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.4. יהי $V=\mathbb{R}^2$ עם הבסיס $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$. יהי $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V$. חשבו את $[v]_B$.

פתרון. נסמן $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$. לכן מתקיים

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

מכאן נקבל מערכת משוואות

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\3&4&y\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&-2&y-3x\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{R_1+R_2\to R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&y-2x\\0&-2&y-3x\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&y-2x\\0&1&\frac{3x-y}{2}\end{array}\right)$$

לכן

$$[v]_B=\begin{pmatrix}y-2x\\\frac{3x-y}{2}\end{pmatrix}$$

הערה 1.5. $[v]_B=0$ אם ורק אם $v=0$.

משפט 1.6. יהי B בסיס סדור של V, יהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,\dots,v_k\in V$. אזי כי

$$\left[\sum_{i=1}^k\alpha_iv_i\right]_B=\sum_{i=1}^k\alpha_i\left[v_i\right]_B$$

תרגיל 1.7. הוכיחו:

1. $v_1,\dots,v_k$ בת"ל אם ורק אם $[v_1]_B,\dots,[v_k]_B$ בת"ל.
2. $w\in\text{Span}\left\{v_1,\dots,v_k\right\}$ אם ורק אם $[w]_B\in\text{Span}\left\{[v_1]_B,\dots,[v_k]_B\right\}$.

הוכחה.

1. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-$v_1,\dots,v_k$ בת"ל. צ"ל ש-$[v_1]_B,\dots,[v_k]_B$ בת"ל. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\sum_{i=1}^k\alpha_i\left[v_i\right]_B=0\Rightarrow\left[\sum_{i=1}^k\alpha_iv_i\right]_B=0\Rightarrow\sum_{i=1}^k\alpha_iv_i=0$$

לפי הנתון, $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$. לכן $[v_1]_B,\dots,[v_k]_B$ בת"ל.
$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-$[v_1]_B,\dots,[v_k]_B$ בת"ל. צ"ל ש-$v_1,\dots,v_k$ בת"ל. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\sum_{i=1}^k\alpha_iv_i=0\Rightarrow\left[\sum_{i=1}^k\alpha_iv_i\right]_B=0\Rightarrow\sum_{i=1}^k\alpha_i\left[v_i\right]_B=0$$

לפי הנתון, $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$. לכן $v_1,\dots,v_k$ בת"ל.

2. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-$w \in \text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$. לכן קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ שעבורם

$$w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \Rightarrow [w]_B = \left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right]_B = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i [v_i]_B$$

כלומר $[w]_B \in \text{Span}\{[v_1]_B, \ldots, [v_k]_B\}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-$[w]_B \in \text{Span}\{[v_1]_B, \ldots, [v_k]_B\}$. לכן קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ שעבורם

$$[w]_B = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i [v_i]_B = \left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right]_B \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

כלומר $w \in \text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$.

$\square$

2 מטריצות מעבר בין בסיסים

הגדרה 2.1. יהי V מרחב וקטורי ממימד n, ויהיו B ו-C בסיסים (סדורים) של V. **מטריצת המעבר** מ-B ל-C היא המטריצה היחידה $[I]_C^B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימת

$$\forall v \in V : [I]_C^B [v]_B = [v]_C$$

אם $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, אזי

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_C & \cdots & [v_n]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

דוגמה 2.2. יהי $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$, ויהי S הבסיס הסטנדרטי. נחשב את $[I]_S^B$:

$$[I]_S^B = \left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_S \quad \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]_S \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

במילים: מטריצת מעבר ביחס לבסיס סטנדרטי = לשים את הווקטורים בעמודות.

משפט 2.3. לכל בסיסים B, C ו-D, מתקיים

$$[I]_D^C [I]_C^B = [I]_D^B$$

מסקנה 2.4. לכל בסיסים B ו-C,

$$[I]_B^C \cdot [I]_C^B = I$$

באופן שקול, $[I]_C^B$ תמיד הפיכה, ומתקיים

$$\left([I]_C^B\right)^{-1} = [I]_B^C$$

אלגוריתם 2.5 (אלגוריתם לחישוב מטריצה מייצגת)**.** יהיו B ו-C בסיסים של V. נניח שרוצים לחשב את $[I]_C^B$. יהי S הבסיס הסטנדרטי של V.

1. מחשבים את $[I]_S^B$ – שזה אומר לשים את וקטורי B בעמודות.
2. מחשבים את $[I]_S^C$.
3. מחשבים את $[I]_C^S = \left([I]_S^C\right)^{-1}$.
4. כופלים $[I]_C^B = [I]_C^S\,[I]_S^B$.

תרגיל 2.6. נתונים הבסיסים הבאים של $\mathbb{R}_2[x]$:

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{1-x, 2-x, 1-3x-x^2\right\} \\ B_2 &= \left\{1+x^2, x+x^2, x^2\right\} \end{aligned}$$

חשבו את $[I]_{B_1}^{B_2}$.

פתרון. הבסיס הסטנדרטי הוא $S = \left\{1, x, x^2\right\}$. נחשב את מטריצות המעבר בין הבסיסים:

$$[I]_S^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, [I]_S^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כדי לחשב את $[I]_{B_1}^S$, נהפוך את $[I]_S^{B_1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_3 \to R_3]{R_2+R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+2R_3 \to R_3]{R_1-R_3 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

לכן

$$[I]_{B_1}^S = \left([I]_S^{B_1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

בסך הכל,

$$[I]_{B_1}^{B_2} = [I]_{B_1}^S\,[I]_S^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 2.7. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד n, יהי B בסיס של V, ותהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. הוכיחו שקיים בסיס יחיד B' של V שעבורו $A = [I]_B^{B'}$.

הוכחה. נתחיל מלהוכיח יחידות: נניח שמצאנו בסיס $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ כזה. נסמן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. לפי הנתון, $[I]_B^{B'} = A$, ולכן לכל $i = 1, \ldots, n$,

$$[w_i]_B = C_i(A) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$$

כלומר, הראינו שכל בסיס B' המקיים את הדרוש חייב להיות אותו דבר. זה מוכיח יחידות.
כדי להוכיח קיום, צריך למצוא בסיס B' שעבורו $[I]_B^{B'} = A$. אבל כבר יש לנו מועמד – נגדיר

$$B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

עבור

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$$

אם נדע ש-B' באמת בסיס, אז נקבל כי

$$[w_i]_B = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = C_i(A) \Rightarrow [I]_B^{B'} = A$$

נוכיח ש-B' בסיס. ראשית, נוכיח ש-B' בת"ל: יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0$$

נעבור לווקטור הקואורדינטות:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [w_i]_B = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i\right]_B = 0$$

אבל הוכחתם בהרצאה (או תוכיחו) שהעמודות של מטריצה הפיכה הן בת"ל. לכן, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
הוכחנו ש-B' בת"ל, וכמו כן מתקיים $|B'| = n$. לכן, לפי משפט השלישי חינם, B' בסיס של V. $\square$