① 29.12.13

פונקציונלית הרצאה 1

• מרחבי L_p

• אופרטורים לינאריים במרחבי בנך

תזכורת

מרחב בנך - מרחב וקטורי, נורמי שלם.

כאשר נורמה $\|\cdot\|$ דרושה לקיום:

א. $\|x\| \ge 0$ $\forall x$. $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

ב. $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$ הומוגניות. λ סקלר.

ג. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ אי שוויון המשולש

שלם - כל סדרת קושי יש גבול.

דוגמאות: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

כל הנורמות שקולות - $\|\cdot\|, \|\cdot\|_p$

מרחבי סדרות $\ell_p = \{(x_1, x_2, \dots): \sum |x_i|^p < \infty\}$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

מרחבי פונקציות $C([0,1])$

מרחבי $L_p(\Omega)$ $L_p(\mathbb{R})$, $L_p([-m,m])$

Ω תחום ב-$\mathbb{R}$ או $\mathbb{R}^n$

• $1 \le p < \infty$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

כך ש: $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}\,(\Omega)} |f|^p \, d\mu}$

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}\,(\Omega)} |f| \, d\mu$$

האם זו נורמה?

• $\|f\| \ge 0$ ✓

• $\|f\| = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} f=0$ $\Leftarrow$ לא!

(בכיוון הזה $\|f\| = \int |f| \, d\mu = 0 \overset{?}{\Rightarrow} f \equiv 0$

לא. אם נשנה את f בקבוצה ממידה 0, האינטגרל לא ישתנה

למשל- $f = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$, $\|f\|_1 = 0$

בעיה להגדיר כאן נורמה..

סימון: $\mathcal{L}_p(\Omega) = \{f: \Omega \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu < \infty\}$

זה לא מרחב נורמי בגלל ש $\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow f=0$

(2) 29.12.13

כמו ההגדרה של

כדי להתגבר על הבעיות הנ"ל נסתכל על מחלקות שקילות של פונקציות

$$[f]=\{g : f\sim g\}$$

$\Downarrow$

$f(x)=g(x)$ כמעט בכל מקום

(זה רק להגדרה הפורמלית אבל לא נשתמש ממש במחלקות השקולות)

ונסמן: $L_p(\Omega)=\{[f] : \|f\|_p<\infty\}$

מרחב וקטורי - סגור לחיבור וכפל בסקלר

<u>משפט:</u> $L_1(\Omega)$ הוא מרחב בנך

א. צ"ל שזה מרחב וקטורי:

<u>למה:</u> אם $f,g\in L_1$ אז $\alpha f+\beta g\in L_1$

כלומר צ"ל שאם $\|f\|_1=\int_\Omega |f|\,d\mu<\infty$ ו- $\|g\|_1=\int_\Omega |g|\,d\mu<\infty$

אז גם $\int_\Omega |\alpha f+\beta g|\,d\mu<\infty$ או (בתמונה אחרת -) $\int_\Omega |f+g|\,d\mu<\infty$ ו- $\int |\alpha f|\,d\mu<\infty$

<u>הוכחה:</u> נוכיח לחוד עבור סכום ומכפלה בקבוע:

עבור מכפלה בקבוע: $\int_\Omega |\alpha f|\,d\mu=|\alpha|\cdot\int_\Omega |f|\,d\mu<\infty$

עבור סכום: $\int_\Omega |f+g|\,d\mu\le\int_\Omega (|f|+|g|)\,d\mu=\underbrace{\int_\Omega |f|\,d\mu}_{<\infty}+\underbrace{\int_\Omega |g|\,d\mu}_{<\infty}<\infty$

ב. צ"ל: L_1 הוא מרחב נורמי.

<u>הוכחה:</u>
- $\|f\|\ge0$ ברור - נובע ממונוטוניות של אינטגרל לבג
- $\|f\|=0$ אז $f\sim0$ כי אחרת $|f|>0$ על קבוצה A ממידה חיובית

ו- $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ כאשר $B_n=\{x : |f(x)|\ge\frac{1}{n}\}$

$\Leftarrow\ \mu(A)\le\sum\mu(B_n)$

לכן יש n כך ש- $\mu(B_n)>0$

אבל אז $\int_\Omega |f|\,d\mu\ge\int_{B_n}|f|\,d\mu\ge\mu(B_n)\cdot\frac{1}{n}>0$ סתירה.

- הומוגניות - קל.
- אי שוויון המשולש -

$$\|f+g\|_1=\int_\Omega |f+g|\,d\mu\le\int |f|\,d\mu+\int|g|\,d\mu=\|f\|_1+\|g\|_1$$

L_1 - מרחב שלם

יש גבול לסדרת קושי
שאליה היא
מתכנסת

הוכחה: תהי f_n סדרת קושי ב L_1.
צ"ל שקיים $f \in L_1$ כך ש $f_n \xrightarrow{L_1} f$, כלומר $\int_\Omega |f_n - f| \, d\mu = \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

מרחב שלם
↓
מתכונות של סדרת קושי במרחב (L_1) מתכנסת

תזכורת - $\|\cdot\|$ היא פונ' רציפה, לכן אם f_n סדרת קושי אז גם $\|f_n\|$ סדרת קושי ב $\mathbb{R}$.
ולכן היא מתכנסת ובפרט חסומה. $\|f_n\| \to L$

- נבחר תת סדרה של f_n כך ש $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$

[אם יש סדרת קושי תמיד אפשר לבחור תת סדרה שמקיימת את התנאי הזה]

כדי לפשט את הסימונים, נסמן $g_k = f_{n_k}$

הערה - אם תת סדרה של סדרת קושי מתכנסת לגבול אז כל הסדרה מתכנסת לגבול

- כעת נגדיר את $g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$ (עדיין מוגדר...)

$$\Big|g_1(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|}_{G_m(x)}\Big| \le |g_1(x)| + G_m(x)$$

[בגלל שבחרנו את ההפרשים להיות קטנים יכולנו לשלוט על סכום ההפרשים]

$0 \le G_1(x) \le G_2(x) \le \dots$ כאשר
$\|G_m\|_1 \le \sum_{k=1}^{m} \|f_{k+1} - f_k\|_1 \le 1$!

נורמות 1

האינטגרלים, חסומות מלמעלה ע"י אחד

הסכומים החלקים מהווים סדרה עולה של פונקציות

מהמשפט שהוכחנו בהרצאה קודמת - התכנסות מונוטונית,
הסדרה G_m מתכנסת בצורה מונוטונית כמעט בכל מקום: $G_m \uparrow G$

$$\int_\Omega G \, d\mu = \lim \int G_m \, d\mu \le 1$$

- כעת נגדיר את $g_{n+1}(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1}(x) - g_k(x))$ (טור טלסקופי...)

כמעט לכל x
$$|g_{n+1}(x)| \le |g_1(x)| + G_n(x) \le \underbrace{|g_1(x)| + G(x)}_{\text{אינטגרבילית}}$$

כלומר g_{n+1} נשלטות ע"י פונק' אינטגרבילית ולכן לפי משפט ההתכנסות החסומה יש גבול

כעת ממשפט ההתכנסות החסומה נקבל שקיימת $g \in L_1$ כך ש $g_n \to g$ כמעט בכל מקום !

לכן g הגבול של f_n שחיפשנו

(4) 29.12.13

אנליזה פונ'

הרצאה ט

משפט: מרחבי L^p הם מרחבי בנך.

הוכחה: צריך להראות ש $\|\cdot\|_p$ מקיימת את אי שוויון המשולש, שנקרא במקרה זה אי שוויון מינקובסקי:

$$\sqrt[p]{\int |f+g|^p d\mu} \le \sqrt[p]{\int |f|^p d\mu} + \sqrt[p]{\int |g|^p d\mu}$$

ההוכחה דומה להוכחה עבור ℓ_p

ההוכחה עוברת דרך אי שוויון הולדר q: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$f\in L_p,\ g\in L_p \qquad \int |fg|\, d\mu \le \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/q}$$

[נזכיר המקרה של קושי שוורץ $\int |fg| \le \sqrt{\int |f| d\mu}\cdot\sqrt{\int |g| d\mu}$, (מתקיים ל $p=q=2$)]

מינקובסקי נותן את אי שוויון המשולש וגם את הסגירות כמרחב וקטורי.

הוכחת השלמות דומה למקרה $p=1$. לא נוכיח...

- אם $\mu(\Omega)<\infty$, למשל $\Omega=[a,b]$ ומידת לבג

אז $L_p(\Omega)\subset L_{p'}(\Omega)$ כאשר $p'<p$ $\qquad L_2([0,1])\subset L_1([0,1])$

- המרחב $L^\infty(\Omega)$ נגדיר לו נורמה.

ככל ש-p יותר גדול זה נותן משקל יותר גדול לערך בו $\infty\leftarrow p$

מתחום הערך הגבוה

ככל שמתרחב עוד הערך בתחום יותר גבוה הערך הגבוה יותר דומיננטי

כשנלקח את $p\to\infty$ נתכנס לערך הגבוה ביותר:

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}(f)$$

נורמת sup

$$\text{ess sup} f = \inf_{g\sim f} \sup g$$

$$L^\infty = \{f:\Omega\to\mathbb{R} : \|f\|_\infty<\infty\}$$

- **טענה:** $C([0,1])$ צפופה ב $L_p([0,1])$ לכל p

צפוף - ניתן למצוא סדרת פונקציות שמתכנסות לכל פונק' ב L_p

מכאן ניתן לקבל גם שהפולינומים צפופים ב $L_p([0,1])$

(5) 29.12.2013
אנליזה פונ'
הרצאה 9

אופרטורים לינאריים במרחבי בנך

$\forall x,y\in E_1$
$\forall \alpha,\beta\in F$
שדה
($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$)

אופרטור לינארי והעתקה לינארית מ E_1 ל E_2 (מרחבים וקטורים)
הוא פונקציה $L:E_1\to E_2$ שמקיימת: $L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$

דוגמאות:
- $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הטלה על קורדינטה
  $(x_1,x_2\dots x_n)\to x_1$
- $S:C([0,1])\to\mathbb{R}$ כאשר $S(f)=\int_0^1 f(x)\,d\mu$
- $L:C([0,1])\to\mathbb{R}^2$ כאשר $L(f)=(f(\frac{1}{3}),f(\frac{2}{3}))$
- $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
  $L(x_1\dots x_n)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n$ צירוף לינארי
- ההעתקות הלינאריות מ $\mathbb{R}^n$ ל $\mathbb{R}^m$ הן בדיוק המטריצות $n\times m$
  מ $\mathbb{R}^n\leftarrow\mathbb{R}^n$ הן המטריצות $n\times n$

E_1,E_2 מרחבים נורמים
העתקה L רציפה בנקודה x_0 אם לכל סדרה $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_{E_1}}x_0$ אז $L(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|_{E_2}}L(x_0)$

כלומר, אם $\|x_n-x_0\|_{E_1}\to0$ אז $\|L(x_n)-L(x_0)\|_{E_2}\to0$

<u>טענה:</u> אם העתקה לינארית $L:E_1\to E_2$ רציפה בנקודה אחת, אז היא רציפה בכל $x\in E_1$.

<u>הוכחה:</u> תהי $x\in E_1$ שרירותית. ותהי $\{x_n\}$ כך ש $x_n\to x$ אז:

$$x_n-x+x_0\to x_0$$

לכן $\|L(x_n-x+x_0)-L(x_0)\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (מרציפות ב x_0)

מלינאריות: $L(x_n-x+x_0)=L(x_n)-L(x)+L(x_0)$

$$\Rightarrow \underbrace{\|L(x_n-x+x_0)-L(x_0)\|}_{\downarrow\,0}=\|L(x_n)-L(x)\|\Rightarrow\|L(x_n)-L(x)\|\to0$$

לכן L רציפה ב x

העתקה לינארית $L:E_1\to E_2$ שרציפה בראשית (בפרט) אז נקראת העתקה לינארית רציפה.

$L(x)=Lx$

<u>הגדרה:</u> העתקה לינארית L נקראת חסומה אם קיים α ($\alpha<\infty$) כך ש $\sup_{\|x\|_{E_1}=1}\|L(x)\|_{E_2}\le\alpha$

<u>טענה:</u> א. $\sup_{\|x\|_1=1}\|Lx\|=\sup_{x\neq0}\frac{\|Lx\|}{\|x\|}$ – נובע מלינאריות $Lx=\|x\|\cdot L\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

ב. $\sup_{\|x\|=1}\|Lx\|=\sup_{\|x\|\le1}\|Lx\|$ –

(6) 29.12.13
אנליזה פונק'
הרצאה ט

משפט: העתקה לינארית L היא חסומה אם ורק אם היא רציפה.

הוכחה: • אם L חסומה אז קיים α כך ש $\|Lx\| \le \alpha\|x\|$ (כי מהטענה)

תהי x_n סדרה שמתכנסת ל-0 ב-E_1, כלומר $\|x_n\|_{E_1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

[לכל העתקה לינארית L
$L0=0$
והתמונה של 0 היא 0]

אז $\|Lx_n\|_{E_1} \le \alpha\|x_n\| \xrightarrow{} 0$

$\Rightarrow \|Lx_n\| \to \|L0\|$

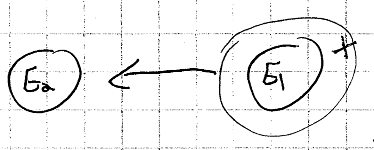
כלומר L רציפה ב-0 ולכן L רציפה.

• אם L לא חסומה, אז קיימים וקטורים x_n כך ש $\|Lx_n\| \ge n\|x_n\|$

כעת נקח $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$

אז $\|Ly_n\| = \frac{\|Lx_n\|}{n\|x_n\|} \ge 1$ ולכן $\|Ly_n\| \not\to 0$ כלומר L לא רציפה ב-0

טענה: אם L העתקה חסומה שמוגדרת על תת מרחב $E_1 \subset X$ אז יש דרך יחידה להרחיב את L לסגור של E_1.



למשל, אם יש לי העתקה לינארית מפונ' רציפות ב-$[0,1]$ ל-$\mathbb{R}$, אז יש דרך יחידה להרחיב אותה להעתקה לינארית מ-$L^p[(0,1)]$ ל-$\mathbb{R}$.
(מעל "לינארית": חסומה)

דוגמאות: גזירת $f \to f'$ העתקה לינארית לא חסומה (למשל על $C^1[0,1]$)

[על הפולינומים הגזירה לא חסומה $f=x^n \Rightarrow f'=nx^{n-1}$
אין דרך להרחיב אותה לכל L^p]

הגדרה: אוסף כל ההעתקות הלינאריות החסומות מ-E_1 ל-E_2 מסומן ב-$\mathcal{L}(E_1,E_2)$.
זהו מרחב וקטורי תחת החיבור $(L_1+L_2)(x) = L_1x + L_2x$
$(\alpha L)x = \alpha Lx$

זהו מרחב נורמי תחת הנורמה $\|L\| = \sup_{\|x\|=1,\ x\in E_1} \|Lx\|$ (*)
נורמה של אופרטור

משפט: אם B_1, B_2 מרחבי בנך אז $\mathcal{L}(B_1,B_2)$ מרחב בנך

בדיקה: (*) כדי להראות שזוהי נורמה צריך להראות:

• $\|L\| \ge 0$: $\|L\|=0 \Rightarrow L=0$ (הכל עובר ל-0, העתקת 0)

• $\|\lambda L\| = |\lambda|\cdot\|L\|$: $\|\lambda Lx\| = |\lambda|\cdot\|Lx\|$

• אי שוויון המשולש: $\|L_1+L_2\| \le \|L_1\| + \|L_2\|$

זה נובע מכך שלכל $x\in E_1$: $\|(L_1+L_2)x\| = \|L_1x+L_2x\| \le \|L_1x\| + \|L_2x\|$

$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \|(L_1+L_2)x\| \le \sup_{\|x\|=1} (\|L_1x\|+\|L_2x\|) \le \sup_{\|x\|=1}\|L_1x\| + \sup_{\|x\|=1}\|L_2x\|$

(7) 29.12.13

[illegible]

נראה ש $L(B_1,B_2)$ שלם. (כדי להראות שהוא מרחב בנך)

תהי $\{L_i\}$ סדרת קושי, ויהי $x\in B_1$. אז $\{L_i x\}$ סדרת קושי ב B_2 הוכחה ש

כי $\|L_m x - L_n x\| \le \|L_m - L_n\|\cdot\|x\| \xrightarrow[\text{סר-חות}]{} 0$

B_2 מרחב שלם. לכן יש $y \in B_2$ כך ש $L_n x \to y$ (יש התאמה של x לגבול)

נגדיר אופרטור L ע"י $Lx=y$. נראה ש $L_n \to L$

[צריך גם להראות ש L היא העתקה לינארית וחסומה - תרגיל]

צריך להראות ש $\|L_n - L\| \to 0$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{\|x\|_{B_1}=1} \|(L_n - L)x\|_{B_2} = \sup_{\|x\|_{B_1}} \|L_n x - Lx\|_{B_2}$$

צריך לסיים..

(בונים את האובייקט שחושדים (הגבול) ואז מוכיחים שהוא אכן מתאים)

(8) 20.12.13

נתזכר למשפט - אם B_1, B_2 מרחבי בנך אז $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ מרחב בנך. — סוף הרצאה 10

הראינו ש $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ מרחב בנך (עם נורמה...)

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\| = \|L\|_{B_1, B_2}$$

כאשר $B_2 = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$

$\mathcal{L}(B, \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})$ מרחב הפונקציונלים של B, או המרחב הדואלי של B

בנך

$$B^* = \mathcal{L}(B, \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathbb{R}}{\mathbb{C}})$$

העתקה לינארית מ B ל $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$ נקראת פונקציונל לינארי

<u>משפט</u>- $p>1$: $(L^p)^* = L^q$ $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$(\ell_p)^* = \ell_q$

$p>1 \quad (L^p)^{**} = L^p \qquad L_1^* = L^\infty \quad \ell_1^* = \ell^\infty$

$(L^p)^* = L^q$ במובן הבא: כל פונקציונל לינארי של L^p הוא מהצורה:

$$f \longrightarrow \int fg \, d\mu$$

כאשר $g \in L^q$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{ (\quad)_{n \times m} \}$$

מטריצות