חשבון אינפי 1

תרגיל 8

1. הוכיחו ע"פ הגדרה:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{2x+3}{x+2}=\frac{3}{2}$

יהי $\epsilon>0$. יש למצוא $\delta>0$ כל שלכל $0<|x|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{2x+3}{x+2}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{x}{2(x+2)}\right|<\epsilon$. עבור $x>0$ נקבל $\left|\frac{x}{2(x+2)}\right|=\frac{x}{2(x+2)}<\frac{x}{4}<\frac{\delta_1}{4}=\epsilon$, וניקח $\delta_1=4\epsilon$. עבור $x<0$ נקבל $\left|\frac{x}{2(x+2)}\right|=-\frac{x}{2(x+2)}>\epsilon$ כלומר $x>-\frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$. ניקח $\delta_2=\frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$ ובסה"כ $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$.

(ב) $\lim_{x\to 1}(3x^2+5)=8$

יהי $\epsilon>0$. נמצא $\delta>0$, כך שלכל $0<|x-1|<\delta$ יתקיים $|3x^2+5-8|=3|x^2-1|=3|x+1||x-1|=3|x-1||x-1+2|\le 3|x-1|^2+6|x-1|<3\delta^2+6\delta=\epsilon$ ונקבל $\delta=-1+\sqrt{1+\epsilon/3}$.

(ג) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

יהי $\epsilon>0$. צריך למצוא M כל שלכל $x>M$ יתקיים $\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\epsilon$. $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}<\frac{1}{M}=\epsilon$ וניקח $M=1/\epsilon$.

(ד) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$

יהי $\epsilon>0$. צריך למצוא M כל שלכל $x<M$ יתקיים $\frac{1}{\sqrt{1-x}}<\epsilon$. $\frac{1}{\sqrt{1-x}}<\frac{1}{\sqrt{1-M}}=\epsilon$ ונקבל $M=1-1/\epsilon^2$.

(ה) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=\infty$

יהי $M>0$. צריך למצוא δ כל שלכל $0<|x-1|<\delta$ יתקיים $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}>M$. עבור $x>1$ נקבל $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+2}{(x-1)^2}=1+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}>1+\frac{2}{\delta}+\frac{2}{\delta^2}=M$, וניקח $\delta_1=2[1+\sqrt{1+2(M-1)}]/(M-1),\ (M>1)$. עבור $x<1$ נקבל $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=1-\frac{2}{1-x}+\frac{2}{(x-1)^2}>1+\frac{2}{\delta^2}=M$, וניקח $\delta_2=\sqrt{2/(M-1)},\ (M>1)$. עבור $M\le 1$ ניקח $\delta_3=1$, כך שלכל $0<x<2$ יתקיים $1+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}>1+\frac{2}{0-1}+\frac{2}{(0-1)^2}=1-2+2\ge M$. כעת ניקח $\delta=\begin{cases}\min(\delta_1,\delta_2), & M>1\\ 1, & M\le 1\end{cases}$.

2. הוכיחו כי $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3} \neq 1$.

נראה כי קיים ϵ_0 כך שלכל $\delta > 0$ קיים $x \in (2-\delta, 2+\delta)$ כך ש $\left|\frac{x+2}{x+3}-1\right| = \frac{1}{|x+3|} > \epsilon_0$. ניקח $\epsilon_0 = \frac{1}{8}$. עבור $\delta > 1$ ניקח $x = 3 \in (2-\delta, 2+\delta)$ כך ש $\frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} > \epsilon_0$. עבור $0 < \delta \leq 1$ ניקח $x = 2+\delta/2 \in (2-\delta, 2+\delta)$, ואז $\frac{1}{2+\delta/2+3} > \frac{1}{5+1/2} > \frac{1}{6} > \epsilon_0$

3. הוכיחו כי הגבולות הבאים אינם קיימים:

(א) $\lim_{x\to\infty} x\sin x$

ניקח את הסדרה המתכנסת לאינסוף $\{x_n\} = \{\pi(n+\frac{1}{2})\}$ עבורה $x_n \sin x_n = (-1)^n \pi(n+\frac{1}{2})$ ולכן לא קיים גבול

(ב) $\lim_{x\to\infty} \cos x$

ניקח את הסדרה המתכנסת לאינסוף$\{x_n\} = \{\pi n\}$ עבורה $\cos x_n = (-1)^n$ ולכן לא קיים גבול.

4. הוכיחו כי אם קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ואם קיימת סביבה של x_0 אשר בה $f(x) \leq M$, אזי $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq M$.

נסמן $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ונבחין בין 2 מקרים: בראשון $f(x) = M$ בסביבה כלשהיא $(-\delta_0, \delta_0)$ של x_0. מצד שני קיימת סביבה $(-\delta_1, \delta_1) \subseteq (-\delta_0, \delta_0)$ של x_0 בה מתקיים $l-\epsilon < f(x) = M < l+\epsilon$ לכל $x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ ולכל $\epsilon_1 \leq \epsilon$. לכן $M = l$ (אחרת אם $M < l$ או $M > l$ קיים $\epsilon_0 < \epsilon_1$ קטן מספיק כך ש $M < l-\epsilon_0$ או $M > l+\epsilon_0$).

במקרה השני נתבונן בסביבה $(-\delta_0, \delta_0)$ של x_0 בה $f(x) < M$. מקיום הגבול נובע כי קיים $0 < \epsilon_2 \leq |M-l|$ וסביבה $(\delta_1, \delta_1) \subseteq (-\delta_0, \delta_0)$ של x_0 כך שלכל $x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ מתקיים $l-\epsilon_2 < f(x) < l+\epsilon_2 \leq l+|M-l|$ וגם $f(x) < M$. אם $M < l$ נקבל $-\epsilon_2 \geq M-l$ ואז $f(x) > l-\epsilon_2 \geq l+M-l = M$ וקיבלנו סתירה. לכן $M > l$.

5. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{3x^2+x-2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{3x^2+x-2} = \frac{1-4}{3\cdot 1+1-2} = \frac{3}{2}$$

(ב) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(2x+3)(4x-1)+3}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(2x+3)(4x-1)+3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2+20x^3+12x-2x^2-5x-3+3}{x} = 7$$

(ג) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^2-2x-1}{4x^2-8x+3}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^2-2x-1}{4x^2-8x+3} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(x-1/2)(8x+2)}{(x-1/2)(4x-6)} = -\frac{3}{2}$$

ד) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x^{1/6})(1+x^{1/6}-2x^{1/3})}{(1-x^{1/2})(1-x^{1/6})(1+x^{1/6})}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x^{1/6})(1+2x^{1/6})}{(1-x^{1/2})(1+x^{1/6})}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x^{1/6})(1+2x^{1/6})}{(1-x^{1/6})(x^{1/3}+x^{1/6}+1)(1+x^{1/6})}=\frac{1+2}{3\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

ה) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{1+3x}$

לכל $x\geq 1$ מתקיים $1<\sqrt[x]{1+3x}<\sqrt[x]{4x}$. כעת נרשום $[x]^{\frac{1}{[x]+1}}\leq x^{\frac{1}{x}}\leq [x+1]^{\frac{1}{[x]}}$ ו $4^{\frac{1}{[x]+1}}\leq 4^{\frac{1}{x}}\leq 4^{\frac{1}{[x]}}$. מהעובדה כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ ו $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0$, נקבל כי $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}4^{\frac{1}{x}}=1$ ולכן $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{4x}=1$ והגבול המבוקש הוא 1.

ו) $\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\tfrac{1}{x}+\cos\tfrac{1}{x})^x=\sqrt{[\lim_{x\to\infty}(\sin\tfrac{1}{x}+\cos\tfrac{1}{x})^x]^2}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{[(\sin\tfrac{1}{x}+\cos\tfrac{1}{x})^x]^2}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{[(\sin\tfrac{1}{x}+\cos\tfrac{1}{x})^2]^x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{(1+\sin\tfrac{2}{x})^x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{\frac{2}{x}\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\right)^x}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(1+\tfrac{2}{x}\right)^x}=\sqrt{e^2}=e.$$

ז) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2+x}\right)^{\frac{(2+x)(1-\sqrt{x})}{(2+x)(1-x)}}=$$
$$e^0=1.$$

ח) $\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$

$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{y\to\infty}\frac{[y]}{y}$. $k\leq y<k+1$, $\frac{[y]}{y}=k/y$ לכל $k\neq 0$ שלם. כעת, לכל $k>0$ מתקיים $\frac{y-1}{y}<\frac{k}{y}\leq 1$ ולכן ע"פ כלל הסנדויץ הגבול המבוקש הוא 1.

ט) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1/2}{1/(x-2)}\right)^{\frac{1}{x-2}}=$$
$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1/2}{t}\right)^t=\sqrt{e}$$

6. חשבו את הגבולות הבאים:

א) $\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{-(3-x)}=$$
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}=\infty$$

ב) $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x^3}$
$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x^3}=\infty$

ג) $\lim_{x\to2}f(x)$ כאשר $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & x>2 \\ x/2, & x<2\end{cases}$
$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}x^2-3=1$.
$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}x/2=1=\lim_{x\to2^+}f(x)$
ולכן $\lim_{x\to2}f(x)=1$

בהצלחה!