קורס טופולוגיה, אוניברסיטת בר-אילן, 2022

מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 1

מילות מפתח: התכנסות, רציפות, קבוצות פתוחות, טופולוגיה ... Topology =Topos+Logos

Topology $\supset$ {Algebraic Topology, Topological Algebra, Differential Topology, …}

מרחב מטרי -- אחת מהדרכים לקבלת מרחבים טופולוגיים.

{Metric Spaces} → {Topological Spaces} (לא על, לא חח"ע)

מרחבים מטריים קישור מומלץ

הגדרה (Frechet 1906): **מטריקה** (או **מרחק**) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה

$$d : X \times X \to [0,\infty) \quad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

אקסיומות:

m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (אי שוויון המשולש).

שקול: $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n)$ (**אינדוקציה !**)

אומרים ש - (X,d) **מ"מ** (metric space).

דוגמאות:

1) $(\mathbb{R},d)$ שמוגדרת לפי $d(x,y) = |x-y|$

2) $X = \mathbb{R}^n$ $x = (x_1,..,x_n)$, $y = (y_1,..,y_n)$

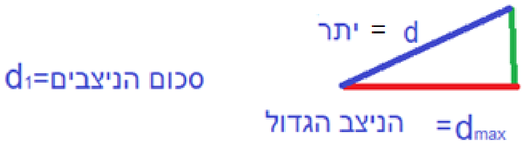
א. מטריקה אוקלידית $(\mathbb{R}^n,d)$ $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$

ב. מטריקת הסכום Manhattan metric $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

ג. מטריקת המקסימום $d_{\max}(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1,\cdots,n\}\}$

הערה: $d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq n d_{\max}$.

מקרה של $n=2$



<u>הגדרה:</u> (**מרחב נורמי**) נניח E מרחב ווקטורי על שדה $\mathbb{R}$.

פונקציה $\|\cdot\|:E\to[0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

$(n_1$ $\quad \|\mathrm{v}\|=0 \Leftrightarrow \mathrm{v}=0_E$

$(n_2$ $\quad \|\mathrm{cv}\|=|\mathrm{c}|\cdot\|\mathrm{v}\|$ לכל $c\in\mathbb{R}, v\in E$

$(n_3$ $\quad \|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|\le\|\mathrm{u}\|+\|\mathrm{v}\|$

אז $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** [normed space]

משפט: לכל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ הפונקציה $d_{\|\cdot\|}(u,v):=\|u-v\|$ $\quad d_{\|\cdot\|}:\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to[0,\infty)$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) **ותמיד מתקיים** $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$.

הוכחה:

$(m_1$ $\quad d(x,y)=\|x-y\|=0 \Leftrightarrow x-y=0_E \Leftrightarrow x=y$

$(m_2$ $\quad \|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|=|(-1)|\cdot\|y-x\|=\|y-x\|$

$(m_3$ $\quad \|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\le\|x-y\|+\|y-z\|$

$\|\mathrm{v}\|=\|-v\|=\|0_E-\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$.

הערה: "ההתאמה" $(E,\|\cdot\|)\mapsto(\mathrm{E},d_{\|\cdot\|})$ $\quad \{normed\ spaces\}\to\{metric\ spaces\}$

א. **לא על**

הסבר: למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת "בתמונה" של ההתאמה הנ"ל.

ב. **חד חד ערכית**

הסבר: נובע מהשוויון $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$. מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה.

דוגמאות של מרחב נורמי:

- במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$ בעל ממד n נגדיר:

א. נורמה אוקלידית $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\|x\|_\infty=\|x\|_{\max}=\max\{|x_i|: i\in\{1,\cdots,n\}\}$

(משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\|x\|_{\max}\le\|x\|\le\|x\|_1\le n\|x\|_{\max}$

* בקבוצה $C[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ continuous\ \ functions\}$ נגדיר:

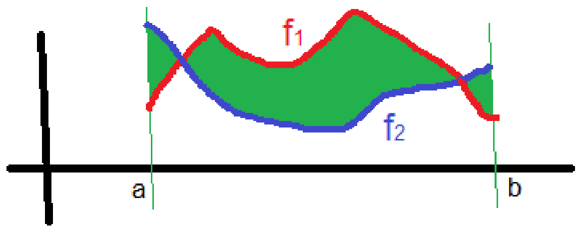
א. $\|f\|_{\max}=\max\{|f(x)|: x\in[a,b]\}$. מסמנים גם $\|f\|_\infty$.

משרה מטריקת מקסימום $d_{max}(f_1,f_2)=\max_{a\le x\le b}|f_1(x)-f_2(x)|$ (מדוע מתקבל *Max* ?)

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות f_1, f_2 בקטע נתון.

ב. $\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$ משרה "מטריקת השטחים" $d_1(f_1,f_2)=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\,dx$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות f_1, f_2 בקטע $[a,b]$



<u>הגדרה:</u> (X,d) נקרא **מרחב פסאודו-מטרי** ($pseudometric$, נקרא $semimetric$ לפעמים) אם:

m_1^p) $x=y \Leftarrow d(x,y)=0$ (החלשה של m_1).

m_2) $d(x,y)=d(y,x)$.

m_3) $d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z)$

<u>הגדרה:</u> (X,d) נקרא **מרחב אולטרה-מטרי** ultrametric אם:

m_1) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

m_2) $d(x,y)=d(y,x)$.

m_3^u) $\max\{d(x,y),d(y,z)\}\ge d(x,z)$ (חיזוק של m_3).

$\{pseudometric\}\supset\{metric\}\supset\{ultrametric\}$

הערה: לכל מטריקה d גם $c \cdot d$ מטריקה $\forall c > 0$ (נכון גם עבור פ"מ, אולטרה-מטריקה)

- לכל קבוצה X נגדיר $\forall x, y \in X: d_0(x, y) = 0$
  פסאודו מטריקת האפס.
- ב - $X = \mathbb{R}^2$, נגדיר $\rho_1(x, y) := |x_1 - y_1|$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל $\rho_1((3,5),(3,18)) = 0$.

ב - $X = \mathbb{R}^n$, נגדיר $\rho_k(x, y) := |x_k - y_k|$ (הרכיב ה k)

- ב $X = C[0,5]$ $\| f \|_{1\le x\le 2} = \max\{| f(x) |: x \in [1,2]\}$ semi-norm (מדוע לא נורמה ?)
- נגדיר על קבוצה X " אולטרה-מטריקת 1-0":

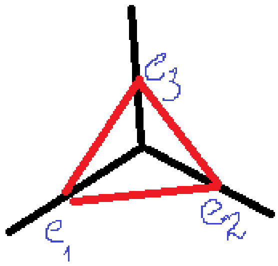
$$d_\Delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

<u>טענה</u>: על כל קבוצה X עם $|X| \geq 2$ יש (לפחות) $\aleph = 2^{\aleph_0}$ מטריקות שונות.

הסבר: $card\{rd_\Delta : r > 0\} = card(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$ העוצמה

<u>תרגיל:</u> $X = \left\{\frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}}\right\} \subset \mathbb{R}^n$

עם מטריקה שמושרית מ d נותן דוגמה ספציפית של d_Δ.



הסבר: $d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\|e_i - e_j\|}_{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$

נשים לב: כאשר $i \neq j$ $\quad \|e_i - e_j\| = \sqrt{\dots + 1^2 + \dots + 1^2 + \cdots} = \sqrt{2}$

- **<u>דוגמה חשובה</u>:** על שלמים $\mathbb{Z}$ נגדיר **מטריקה p-אדית** לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x,y)}}, k(x, y) := \max\{i : p^i | (x - y)\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$ אולטרה-מטריקה

<u>למשל:</u> $x = 24, \; y = 6, \; p = 3$. $\quad d_3(24,6) = ?$

$d_3(24,6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

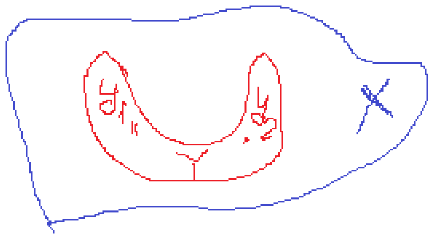
$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$

$d_3(0,5) = d_3(0,1) = 1$

דוגמה חשובה: (קובית קנטור) ב $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{(a_1,a_2,\cdots):\quad a_k\in\{0,1\}\}$

$d(x,y):=\begin{cases}\frac{1}{2^{k(x,y)}}, k(x,y):=\min\{i:\ x_i\neq y_i\},\ x\neq y\\ 0,\ x=y\end{cases}$ אולטרה-מטריקה

הגדרה (תת מרחב מטרי): יהי (X,d) מ"מ, $\emptyset\neq Y\subseteq X$.



מטריקת הצמצום של Y מוגדרת:

$$d_Y(y_1,y_2)=d(y_1,y_2)$$

$$\forall y_1,y_2\in Y$$

מתקבל מ"מ (Y,d_Y) שנקרא **תת מרחב מטרי** של (X,d).

למשל: $\underbrace{Y=\left\{\frac{e_i}{\sqrt{2}},1\leq i\leq n\right\}}_{\text{ת"מ מטרי}}\subset\underbrace{(\mathbb{R}^n,d)}_{=X}$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל - d_Δ.

הערה: כל מ"מ הוא תת מרחב מטרי (עד כדי איזומטריה) של מרחב נורמי (נוכיח בהמשך).

הגדרה: נתון מ"מ (X,d), $\emptyset\neq A,B\subseteq X$.

$$\boldsymbol{d(A,B)}=\inf\{d(a,b)|a\in A,b\in B\}$$

$$0\leq d(A,B)<\infty$$

אזהרה: זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $P(X)$ של תת קבוצות.

הערה: לא תמיד inf ניתן להחליף ב - min.

$$A=\{x\in\mathbb{R}|x<0\},B=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$$

$$min\neq inf=d(A,B)=0$$

אישוויון חשוב: תמיד מתקיים $|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)$ (ראו בתירגול)

הגדרה (הקוטר): $\boldsymbol{diam(A)}:=\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$

$$0\leq diam(A)\leq\infty$$

A נקראת **חסומה** אם $diam(A)<\infty$.

הערה: לא תמיד $sup=max$ $A=(0,1)$ $max\ldots\neq sup\ldots=diam=1$

דוגמה: $diam(\mathbb{Z}, d_p) = 1$.

$$d_p(0,1) = 1 \quad \forall k \in \{0,1,\cdots\} \quad \tfrac{1}{p^k} \le 1$$

הגדרות: יהי (X,d) , $a \in X$, $r > 0$.

1) **כדור פתוח** עם מרכז ב – a ורדיוס = r $\quad a \in B(a,r) = B_r(a) \coloneqq \{x \in X | d(a,x) < r\}$

2) **כדור סגור** $\quad a \in B[a,r] = B_r[a] \coloneqq \{x \in X | d(a,x) \le r\}$

3) **ספרה** *sphere* $\quad a \notin S(a,r) = S_r(a) \coloneqq \{x \in X | d(a,x) = r\}$

הערה: $a \in B(a,r) \subseteq B[a,r] \qquad \underbrace{S(a,r)}_{a\notin} \subsetneq \underbrace{B[a,r]}_{a\in}$

דוגמה: לתאר $B(a,r), B[a,r], S[a,r]$ במרחב (X, d_Δ).

למשל: $S[a,r] = \begin{Bmatrix} \varnothing & 0 < r \neq 1 \\ X \setminus \{a\} & r = 1 \end{Bmatrix}$ .... (המשיכו !)

דוגמה: ב $(\mathbb{Z}, d_3) \qquad B[0,\tfrac{1}{3}] = 3\mathbb{Z}$

הסבר: $B[0,\tfrac{1}{3}] = \{x \in \mathbb{Z} : \ d_3(x,0) \le \tfrac{1}{3}\} = \{x \in \mathbb{Z} : \ 3 | x\} = 3\mathbb{Z}$

תכונות: (לבדוק !)

א) $0 < r_1 \le r_2 \Rightarrow B_{r_1}(a) \subseteq B_{r_2}(a)$.

ב) $diam\big(B_r(a)\big) \le 2r$ (לא תמיד שווה. דוגמה ?).

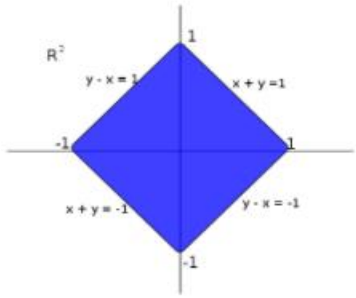
ג) $A \subseteq X$ חסומה $\Leftrightarrow \exists z \in X, \exists r > 0 : A \subseteq B_r(z)$.

ד) (**כדור בתת מרחב**) $B_{d_Y}(y,\epsilon) = B(y,\epsilon) \cap Y$

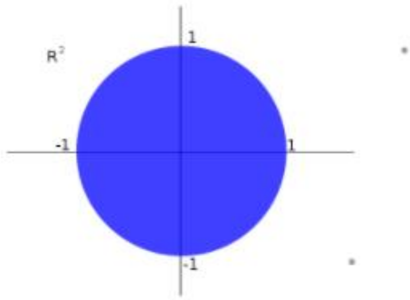
ה) $d \le \rho \Rightarrow B_\rho(a,r) \subseteq B_d(a,r)$

דוגמה: לתאר $B(a,r)$ במרחבים $(\mathbb{R}^2, d_{max}), (\mathbb{R}^2, d_1), (\mathbb{R}^2, d)$

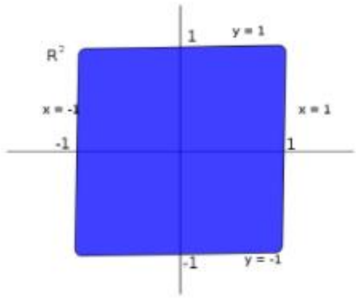
- The metric induced by $\|\cdot\|_1$ in that case, the unit ball is: $|x|+|y|<1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_2$ in that case, the unit ball is: $\sqrt{x^2+y^2}<1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_\infty$ in that case, the unit ball is: $\max\{|x|,|y|\}<1$



<u>הגדרה:</u> $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש – f

שיכון איזומטרי אם **שומרת מרחקים**, כלומר $\forall x_1,x_2\in X:\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)$

איזומטריה אם $\begin{cases} f(X)=Y \\ f \text{ שומרת מרחקים} \end{cases}$

<u>טענה:</u> כל שיכון איזומטרי תמיד חח"ע.

<u>הוכחה:</u> אם $x_1\neq x_2$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$

אז לכן $0=\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)\underbrace{>}_{m_1}0$

בסתירה!

■

שימו לב: אם $f:X\to Y$ שיכון איזומטרי אם ורק אם $f:X\to f(X)$ איזומטריה.

הערה: איזומטריה ב $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריות.

- $[8,10] \not\simeq [1,2] \simeq [5,6]$

  הסבר: הזזה ל 4 יחידות בממשיים היא איזומטריה

  $T_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4 + x$

  משרה איזומטריה $[1,2] \to [5,6]$

  ב $[8,10]$ קיימות נקודות x, y כך ש $d(x,y) = 2$ אבל לא ב $[1,2]$.

  (הסבר אחר: המרחבים עם קוטר שונה. אבל **קוטר נשמר ע"י איזומטריה**)

- שיכון איזומטרי לינאר $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \le n$ (**להשלים**)
- כל הזזה $T_a(v) = a + v$ $\quad T_a : E \to E$ במרחב נורמי $a \in E$ היא איזומטריה.

  הסבר: $\| (a+v_1) - (a+v_2) \| = \| v_1 - v_2 \|$

- כל הזזה $T_a(x) = a + x$ $\quad T_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ היא איזומטריה.

  (**להשלים**)

- $(\mathbb{Z}, d_5)$ לא איזומטרי עם $(\mathbb{Z}, d_3)$.

  הסבר: ב $(\mathbb{Z}, d_5)$ קיימות נקודות x, y כך ש $d_5(x,y) = \frac{1}{5}$ אבל לא ב $(\mathbb{Z}, d_3)$.

- קיים שיכון איזומטרי $\mathbb{R}^n \to l_2$.

  (**להשלים**) דומה למקרה של $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \le n$.

- קיים שיכון איזומטרי $(\mathbb{N}, d_\triangle) \to l_2$.

  הסבר מהיר: $n \mapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$, $\quad (\mathbb{N}, d_\triangle) \to \{\frac{e_n}{\sqrt{2}} : n \in \mathbb{N}\}$ איזומטריה.

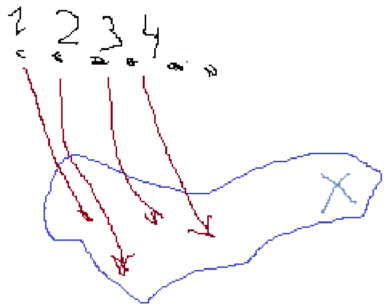
הערה: *מרחב הילברט סדרתי* $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$

$$\| x \| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \qquad < x, y > := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$ מכפלה סקלרית (פנימית)

התכנסות סדרות

<u>הגדרה (תזכורת):</u> סדרה x_n בקבוצה X היא פונקציה $f : \{1, 2, \cdots\} = \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto f(n) = x_n$.

תת סדרה x_{n_k} היא צמצום הפונקציה על תת קבוצה אינסופית $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$



__הגדרה:__ אומרים שסדרה x_n **מתכנסת** ל $a \in X$ במרחב (X,d)

ונסמן $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (או $x_n \xrightarrow{d} a$) אם מתקיים:

הגדרה 1: $\lim_{n\to\infty} d(a,x_n) = 0$

הגדרה 2: כל ε-סביבה $B(a,\varepsilon)$ של a מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה x_n

הגדרה 3: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(a,x_n) < \varepsilon$

דוגמה: ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ $\lim_{n\to\infty} 3^n = 0$

הסבר: $d_3(3^n,0) = \frac{1}{3^n} \to 0$.

__הערה:__

- סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול !) בכל מרחב (X,d).
- תת סדרה של סדרה מתכנסת גם מתכנסת (ברור מה הגבול !)
- נניח $\rho \leq d$. אז $x_n \xrightarrow{d} a \quad \Leftarrow \quad x_n \xrightarrow{\rho} a$.

הסבר: $0 \leq \rho(a,x_n) \leq d(a,x_n) \to 0$ בעזרת *תכונת סנדוויץ'* $\rho(a,x_n) \to 0$.

- התכנסות ב $\mathbb{R}^n$ היא התכנסות רכיב-רכיב.

הסבר: התכנסות גוררת "התכנסות רכיב-רכיב" כי $0 \leq \| v^{(m)} - u \|_k \leq \| v^{(m)} - u \| \xrightarrow{m\to\infty} 0$

($\| x \|_k$ "סמי-נורמה לפי קואורדינטה ה k " שהגדרנו)

גם ההפך נכון. תשתמשו בזה ש $\sum_{k=1}^{n} \| v \|_k =$ "נורמה של הסכום".

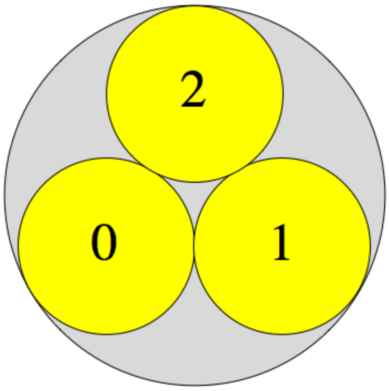
תרגיל: תנו דוגמה של סדרה לא מתכנסת ב l_2 שמתכנסת רכיב-רכיב.

הסבר: הסדרה הבאה מתכנסת רכיב רכיב לווקטור האפס

$$e_1=(1,0,0,0\cdots)$$
$$e_2=(0,1,0,0\cdots)$$
$$e_3=(0,0,1,0\cdots)$$
$$\cdots$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\quad \forall i\neq j \quad d(e_i,e_j)=\sqrt{2}$

<u>*תרגיל:</u> לפי האיור הבא תרכיבו ניסוח לתרגיל אפשרי לגבי מ"מ $(\mathbb{Z},d_3)$



ניסוח אפשרי: המרחב אפשר להציג כאיחוד של שלושה כדורים סגורים עם רדיוס $\frac{1}{3}$.

הסבר: $\quad B_{\frac{1}{3}}[0]\cup B_{\frac{1}{3}}[1]\cup B_{\frac{1}{3}}[2]=3\mathbb{Z}\cup(3\mathbb{Z}+1)\cup(3\mathbb{Z}+2)=\mathbb{Z}$

<u>הגדרה:</u> נק' $a\in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם $\quad \exists\epsilon>0:\ \ B(a,\epsilon)=\{a\}$

<u>דוגמאות:</u> א. אין נקודה מבודדת ב $\mathbb{R}$ או ב $\mathbb{Q}$ ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $X=[0,1]\cup\{3\}$ של $\mathbb{R}$.

<u>הגדרה:</u> מ"מ (X,d) נקרא **<u>דיסקרטי</u>** אם כל נקודה ב X מבודדת.

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, כל מרחב X עם מטריקת 0-1 הם דיסקרטיים.
- (Hamming distance)

בקבוצה $\quad F(\mathbb{N})=\{(x_1,x_2,\cdots):\quad x_i\in\{0,1\}\ \ \exists\, k\in\mathbb{N}\ x_i=0\ \ \forall\, i>k\}$

$$d_H(x,y)=\sum_i |x_i-y_i|$$

$(F(\mathbb{N}),d_H)$ מרחב מטרי כך שהטופולוגיה שלו היא דיסקרטית.

המשמעות של $d_H(x,y)$ היא מספר ההבדלים בין המילים x,y.

מ"מ $(F(\mathbb{N}),d_H)$ משוכן לתוך מרחב נורמי $l_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\}$.

מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 2

משפט: a נקודה מבודדת במרחב **מטרי** (X,d) אם ורק אם

$\lim x_n = a$ גורר שהסדרה x_n היא בהכרח קבועה לבסוף $x_1,\cdots,x_m,a,a,\cdots$.

בכיוון שני נוכיח יותר: **אם a לא מבודדת אז שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a.**

הוכחה: אם a מבודדת אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$.

(כיוון ראשון) נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור ε הנ"ל קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$. אז הסדרה היא לבסוף a.

(כיוון שני) נניח כעת שנקודה a לא מבודדת.

נוכיח: **שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a.**

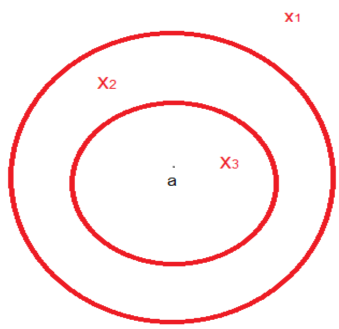
נבחר $x_1 \neq a$ (אם לא קיים אז המרחב הוא נקודון $X=\{a\}$ והנקודה מבודדת).

נעיר ש $0<d(a,x_1)$ כי (X,d) מרחב מטרי ומתקיימת m_1.

נבחר $0<\varepsilon_1<\min\{d(a,x_1),1\}$

בגלל ש a לא מבודדת קיים $x_2 \in B(a,\varepsilon_1), x_2 \neq a$.

נעיר ש $x_2 \neq x_1$ כי $d(a,x_2)<d(a,x_1)$. וגם $d(a,x_2)<1$.



נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה.

אם כבר הגדרנו $x_1,\cdots,x_n$ (שונים) $d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$

ולא שווים ל a עם התנאי $\forall 1<k\le n \;\; d(a,x_k)<\frac{1}{k-1}$

אז נבחר ε_n שמקיים $0<\varepsilon_n<\min\{d(a,x_n),\frac{1}{n}\}$

ונבחר x_{n+1} כך ש $x_{n+1}\neq a$, $d(a,x_{n+1})<\varepsilon_n$ (שוב, שימו לב ש a לא מבודדת)

אז $d(a,x_{n+1})<d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$.

כך נקבל סדרה עם איברים שונים ו $\lim x_n=a$ כי לכל $n>1$ $d(a,x_n)<\frac{1}{n-1}\to 0$.

☺

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב $(\mathbb{Z},d_p)$.

הסבר: $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a+p^n\xrightarrow{d_p}a$ סדרה עם איברים שונים שמתכנסים ל a .

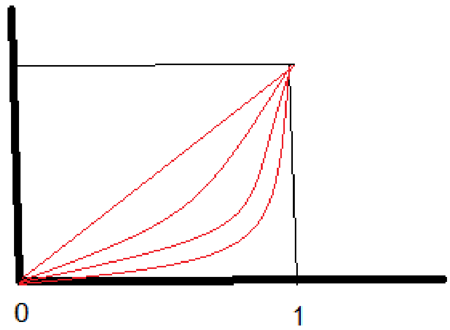
<u>דוגמה:</u> ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש

$$\begin{cases} f_n \overset{d_1}{\to} \theta \\ f_n \overset{d_{max}}{\not\to} \theta \end{cases}$$

$d_1(f_1,f_2):=\int_0^1|f_1(x)-f_2(x)|dx \qquad d_{max}(f_1,f_2):=\max\limits_{0\le x\le 1}|f_1(x)-f_2(x)|$.

הסבר:

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$) $\quad f_n(x)=x^n, x\in[0,1] \quad \theta(x)=0$



$$d_1(f_n,\theta)=\int_0^1|f_n(x)-0|dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\lim_{n\to\infty}d_1(f_n,\theta)=0 \qquad f_n\overset{d_1}{\to}\theta$$

מצד שני

$$d_{max}(f_n,\theta)=\max_{0\le x\le 1}|f_n(x)-0(x)|=\max_{0\le x\le 1}x^n=1\nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n,\theta)\nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta$$

תרגיל: באופן דומה לכל $[a,b]$, $a<b$.

הגדרות:

א) נניח d,ρ מטריקות על <u>אותה קבוצה</u> X. אומרים ש – d **דומיננטי ביחס ל –** ρ אם:

$$\boxed{x_n\overset{d}{\to}a\Rightarrow x_n\overset{\rho}{\to}a}$$

לכל סדרה $x_n\in X$.

ב) אומרים ש - $d\sim\rho$ **("שקולות")** אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n\overset{d}{\to}a\Leftrightarrow x_n\overset{\rho}{\to}a}$$

תכונות פשוטות:

1) $d\sim c\cdot d$, $c>0$ קבוע.

2) $\rho\le cd$ $\Leftarrow$ d דומיננטי ביחס ל – ρ (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

3) מטריקת 0-1 (או כל מטריקה עם טופולוגיה דיסקרטית) דומיננטית ביחס לכל מטריקה.

הסבר: כי לגבי מטריקת 0-1 נקבל מרחב דיסקרטי. כל נקודה מבודדת. במרחב כזה יש רק התכנסות קבועה לבסוף. מצד שני כל סדרה שהיא קבועה לבסוף מתכנסת לגבי כל מטריקה על אותה קבוצה.

דוגמה: d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1 בקבוצה $C[a,b]$.

<u>**הסבר:**</u> מ"ל – $d_1\le c\cdot d_{max}$.

ש"ל – $\|\cdot\|_1\le c\cdot\|\cdot\|_{max}$.

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b max|f(x)|dx\le\underbrace{(b-a)}_{c>0\text{ קבוע}}\cdot\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

הוכחנו $\|\cdot\|_1\le(b-a)\cdot\|\cdot\|_{max}$.

<u>**דוגמה:**</u> $X:=\mathbb{R}^n$. $\boxed{d_{max}\sim d\sim d_1}$

<u>**הסבר:**</u> $\boxed{d_{max}\le d\le d_1\le n\cdot d_{max}}$

מסקנה: שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

בהמשך נוכיח – הטופולוגיות שוות!

הגדרה חשובה: (טופולוגיה של (X,d))

נגדיר טופולוגיה של מ"פ (X,d) כאוסף של כל תת-קבוצות **פתוחות** ב X. נסמן:

$$\boldsymbol{top(d)} = top(X,d) \coloneqq \{\text{קבוצות פתוחות ב } (X,d)\}$$

כאשר **"קבוצה פתוחה"** מוגדרת כך:

אומרים ש - $O \subseteq X$ היא פתוחה אם (כל נקודה שלה **פנימית**) מתקיים:

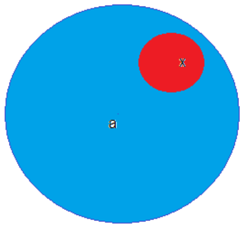
$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

שימו לב: תת קבוצה $A \subseteq X$ **לא פתוחה** ב (X,d) אם"ם קיימת נקודה $a \in A$ כך ש $B(a,\varepsilon)$ לא מוכל ב A לכל $\varepsilon > 0$.

הערה: מכאן ברור למשל $\emptyset \in top(d)$.

משפט: $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X,d) : B_r(a) \in top(d)$.

(ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).



הוכחה: הרעיון: $d(a,x) + r_x < r$.

מכאן ניקח כל מס' r_x כך: $0 < r_x < \underbrace{r - d(a,x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ \text{כי } x \in B_r(a)}}$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$.

נניח $y \in B_{r_x}(x)$, צ"ל - $y \in B_r(a)$.

$$d(a,y) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a,y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$.

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור r_x מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.

☺

תוצאה: **{כדורים פתוחים} בסיס לטופולוגיה** $(top(d))$

$$top(d) \ni O = \bigcup_{x \in O} B_{\epsilon_x}(x)$$

התנאים הבאים שקולים:

1) $\emptyset \neq O \in top(d)$.

2) $O =$ איחוד של "כדורים פתוחים".

תרגיל: הוכיחו שלכל $(X, top(d))$ מתקיים:

t_1) $\emptyset, X \in top(d)$

t_2) $O_1, O_2 \in top(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in top(d)$ (חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם פתוח)

t_3) $\forall i \in I \quad O_i \in top(d) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in top(d)$ (איחוד של קבוצות פתוחות גם פתוח)

הערה: $\{t_1, t_2, t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה X בצורה אבסטרקטית.

הערה: אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff*. על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

משפט (תכונת Hausdorff):

נניח (X, d) **מרחב מטרי**. אז לכל 2 נקודות שונות יש סביבות זרות.

הוכחה: $a \neq b \overset{m_1}{\Rightarrow} d(a,b) > 0$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$.

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$. נבדוק !

אם נניח שלא: $\exists\, x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$

$$\begin{cases} d(a,x) < \epsilon \\ d(b,x) \overset{m_2}{=} d(x,b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר: $d(a,b) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,b) < 2\epsilon$

$\Rightarrow d(a,b) < 2\epsilon$

סתירה לבחירה ☺

<u>משפט (יחידות הגבול):</u> במרחב **מטרי** גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

<u>הוכחה:</u> אם נניח בשלילה $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ $a \neq b$

לפי משפט (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות

$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$

מצד שני, כמעט כל האיברים x_n נמצאים ב - $B_\epsilon(a)$ וגם ב - $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה ⇐ משל. ☺

דוגמה נגדית (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X = (\mathbb{R}^2, \rho_1)$ עם $\rho_1(x,y) \coloneqq |x_1 - y_1|$

ניקח את הסדרה $\forall y \in \mathbb{R}$ $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \to (1,y)$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

תרגיל: הוכיחו שמרחב פסאו-דומטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

<u>הערה:</u>

ב (X,d) מ"פ, $a \in X$, x_n סדרה. התנאים הבאים שקולים:

1) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ $(d(x_n,a) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0)$.

2) $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, n > N: d(x_n,a) < \epsilon$.

3) בכל ϵ-סביבה של a (ז"א בכל $B(a,\varepsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

4) בכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a, כמעט כל האיברים נמצאים ב O.

<u>הגדרה:</u> ת"ק A במרחב (X,d) נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

ז"א אם $A^c \coloneqq X \setminus C \in top(d)$

<u>למשל:</u> $B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק ! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות !)

טענה: איחוד **סופי** של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

תרגיל: הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו: כל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

תרגיל: הוכיחו שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי = חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

סדרות קושי ומרחב מטרי שלם

הגדרה: (X,d) מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** $(Cauchy)$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i,x_j) < \epsilon$$

$$i,j \geq n_\epsilon$$

הערה: אם x_n מתכנסת ב X אז x_n סדרת קושי (לבדוק!).

לכן אם סדרה לא ס"ק אז גם לא מתכנסת.

למשל:

$$e_1 = (1,0,0,0\cdots)$$
$$e_2 = (0,1,0,0\cdots)$$
$$e_3 = (0,0,1,0\cdots)$$
$$\dots$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\forall i \neq j \quad d(e_i,e_j) = \sqrt{2}$

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרא **שלם** $(Complete)$ אם לכל סדרת קושי x_n ב X יש גבול ב-X.

הגדרה: מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** $(Banach\ space)$ אם $(E,d_{\|\cdot\|})$ שלם.

דוגמאות:

- $(C[a,b],\|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n,\|\cdot\|), (\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)$ מרחבי Banach
- $(C[a,b],\|\cdot\|_1), (C[a,b],\|\cdot\|_2)$ **לא** מרחבי Banach

הערה: $\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$

מכפלה פנימית ב - $C[a,b]$ שממנה מקבלים נורמה: $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$

הנורמה מגדירה מטריקה d_2 על מרחב הפונקציות $C([a,b])$.

- נגדיר $l_\infty := \left\{x = (x_1, x_2, \dots) \middle| \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\right\}$ מרחב Banach

מרחבה Banach של סדרות **חסומות**.

הכללה: מרחב פונקציות חסומות על קבוצה S

$$l_\infty(S) := \{f: S \to \mathbb{R} | f(S) \text{ חסום ב } \mathbb{R}\}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in S} |f(x)|$$

2 מקרים פרטיים:

1) $S = \mathbb{N}$, אז נקבל את $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$.

2) $S = \{1,2,\dots,n\}$, אז נקבל את $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.

דוגמה: $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם !

נניח עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב X **(פרטים בתרגול).**

הערה:

שתי תכונות מאוד חשובות של שלמות:

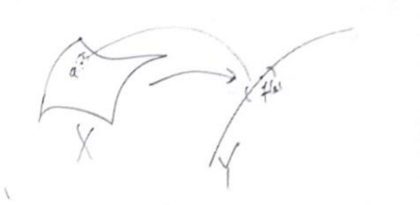
1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום).

2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d). אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגור ב $- X$.

רמז: תת קבוצה היא סגורה $\Leftrightarrow$ היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

פונקציות רציפות

הגדרה (רציפות): נניח (X,d), (Y,ρ) מרחבים. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת **רציפה בנקודה** $a \in X$ אם:



$$\boxed{\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : d(a,x) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(a), f(x)\big) < \epsilon}$$

f נקראת **רציפה**, כאשר f רציפה בכל נקודה $a \in X$.

נסמן: $f \in C(X,Y)$. אם $Y = \mathbb{R}$ אז נסמן: $f \in C(X)$.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש f – **רציפה במידה שווה (במ"ש)** *uniformly continuous*

אם בבחירה של δ אין תלות ב a. ז"א

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \epsilon$$

$$\boxed{f \in UC(X,Y)}$$

<u>הגדרה:</u> אומרים ש f מקיימת **תנאי ליפשיץ** $(Lipschitz)$ לגבי המקדם $0 < c$ אם:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in X : \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le c \cdot d(x_1, x_2)}$$

נסמן $\boxed{f \in Lip_c(X,Y)}$ $\boxed{Lip(X,Y) = \cup_{c>0} Lip_c(X,Y)}$

תמיד: $\boxed{Lip(X,Y) \subset UC(X,Y) \subset C(X,Y)}$

<u>דוגמאות מאנליזה:</u>

רציפה אבל לא במ"ש $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ $f(x) = \sqrt{x}$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

<u>הערה:</u> כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (**אבל לא ההפך ! תנו דוגמה**).

<u>סימון:</u> אם קיימת איזומטריה, נסמנה $(X,d) \simeq (Y,\rho)$

זהו "יחס שקילות" **באוסף** Metr (מרחבים מטריים).

1) $(X,d) \simeq (X,d)$ (פ' הזהות).

2) $(X,d) \simeq (Y,\rho) \Leftarrow (Y,\rho) \simeq (X,d)$ (פ' הופכית).

3) $\begin{cases} (X_1,d_1) \simeq (X_2,d_2) \\ (X_2,d_2) \simeq (X_3,d_3) \end{cases} \Rightarrow (X_1,d_1) \simeq (X_3,d_3)$ (ההרכבה)

דוגמאות:

1) **הזזה** במרחב נורמי $T_v(x) = v + x$ $T_v: E \to E$ תמיד איזומטריה (הוכחנו).

תבדקו ש $T_v(B(0_E,r)) = B(v,r)$. לכן $B(v,r) \simeq B(u,r)$ $\forall u,v \in E$.

2) ($[0,\infty) \overset{\|\cdot\|}{\to} f: E \in Lip_1(E,\mathbb{R})$, כאשר E מרחב נורמי.

הסבר: $|\|u\| - \|v\|| \underbrace{\le}_{c=1} \|u - v\|$

3) $f_A: X \to \mathbb{R} \in Lip_1(X,\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י: $f_A(x) = d(x,A)$

הסבר: שימוש באי שוויון חשוב $|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$

משפט (עיקרון $\boldsymbol{Heine}$): נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow f(x_n) \overset{\rho}{\to} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)

לפני ההוכחה קודם נדון כמה תוצאות.

משפט (השוואת טופולוגיות): נניח ש - d,ρ מטריקות על אותה קבוצה X. אז התנאים הבאים שקולים:

1) $top(\rho) \subseteq top(d)$.

2) d דומיננטי ביחס ל ρ. ז"א $x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a$

הוכחה: נגדיר את "פונקצית הזהות" $x \mapsto x$ $(X,d) \overset{id}{\to} (X,\rho)$

נשתמש במשפט (עיקרון היינה).

כש - $f = id$, אז $f^{-1}(O) = O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in top(\rho): O \in top(d)$$

$$\Rightarrow top(\rho) \subseteq top(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

__תוצאה:__ התנאים הבאים שקולים:

1) $top(d) = top(\rho)$.

2) $\rho \sim d$.

__הסבר:__ נובע מיד ! שני כיוונים במשפט הקודם.

__דוגמה:__

1) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad$ $top(d_{max}) = top(d) = top(d_1)$

כי $\quad$ $d_{max} \sim d \sim d_1$

2) $X = C[a,b]$ $(a < b)$ $\quad$ $top(d_1) \subsetneq top(d_{max})$

- (מוכל) כי d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1: $\quad$ $d_1 \leq (b-a)d_{max}$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

- (לא שווה) כעת, יש **הכלה ממש** כי קיימת סדרה f_n ב - $C[a,b]$ $(a < b)$ וגם סדרה f ב - $C[a,b]$ כך ש $\quad$ $f_n \overset{d_1}{\to} f$, $f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} f$

ראינו דוגמה בהרצאה ב - $[0,1]$.

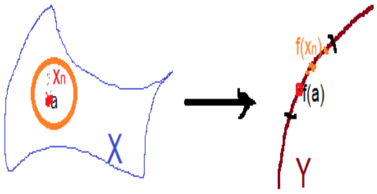
הרצאה 3

<u>משפט (עיקרון $Heine$):</u> נניח $(Y,\rho),(X,d)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f <u>שומרת על התכנסות</u> (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)



<u>**הוכחה:**</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נתון ש $x_n \xrightarrow{d} a$. צ"ל - $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

f רציפה $\Leftarrow$ f רציפה בנקודה $a \in X$.

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: f\big(B_\delta(a)\big) \subseteq B_\epsilon\big(f(a)\big) \qquad \text{(הגדרת } Cauchy\text{).}$$

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \in B_\delta(a)$$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב ϵ-סביבה: $B_\epsilon\big(f(a)\big)$

לכן הוכחנו: $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

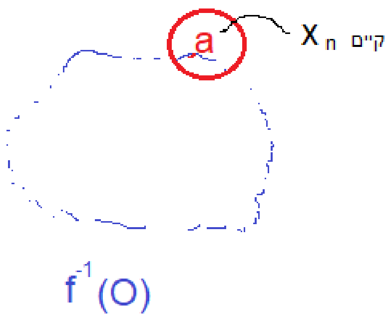
<u>$(2) \Leftarrow (3)$:</u>

נניח בשלילה ש (3) לא מתקיים. ז"א:

$$\exists O \in top(\rho): f^{-1}(O) \notin top(d)$$

כלומר O פתוחה בעוד ש $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב (X,d).

ז"א קיימת נקודה "<u>לא פנימית</u>" $\exists a \in f^{-1}(O): \forall \epsilon > 0\ \ B_\epsilon(a) \nsubseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon \coloneqq \frac{1}{n}$ קיים $x_n \in X$ כך ש

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \frac{1}{n} \\ f(x_n) \notin O \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן - $x_n \xrightarrow{d} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

$f(a) \in O \in top(\rho)$ וכן O פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב O.

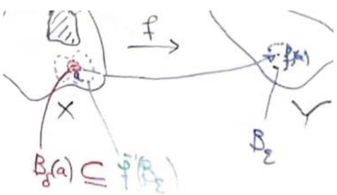
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B_\epsilon(f(a)) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $\forall n: f(x_n) \notin B_\epsilon(f(a))$.

לכן $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

<u>$(3) \Leftarrow (1)$:</u>

בודקים את (1) -- רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon > 0$ נתון – $O = B_\epsilon(f(a)) \in top(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(B_\epsilon(f(a))\right) \in top(d)$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f(B_\delta(a)) \subseteq f(f^{-1}(O)) \subseteq O = B_\epsilon(f(a))$$

<u>הערה:</u> במשפט עקרון $Heine$ (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

<u>הסבר מקוצר:</u> $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$

A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן $(4) \Leftrightarrow (3)$.

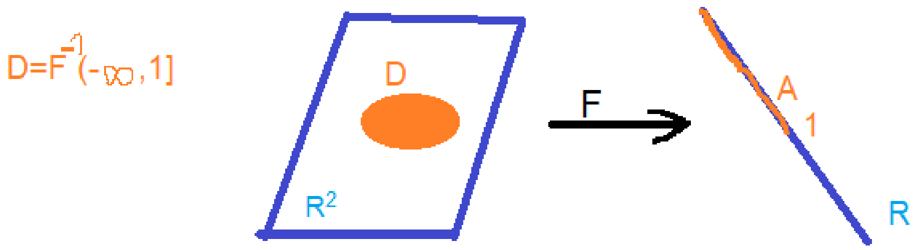
☺

<u>דוגמאות:</u>

1) $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$ סגור ב - $\mathbb{R}^2$.

<u>הסבר:</u> $F(x,y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).



2) כל מישור ב - $\mathbb{R}^3$ סגור. למשל

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \underbrace{2x + 3y - 4z + 5}_{F(x,y,z)} = 0\right\}$$

סגור, כי את D ניתן לכתוב כ $D = F^{-1}(0)$ ואז $\{0\}$ סגור ב - $\mathbb{R}$.

3) בכל מ"מ (X,d): $B_r[a]$ $S_r(a)$ סגורות.

<u>הסבר:</u>

נגדיר פו' $f_a: X \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = d(a,x)$. זוהי פונקציית ליפשיץ – $f_a \in Lip_1 \subset C(X)$.

$$f_a^{-1}(-\infty, r] = B_r[a] := \{x \in X | d(a,x) \le r\}$$

גם סגור!

4) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ מטריצות הפיכות, <u>פתוחה</u> במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Gl_n(\mathbb{R}) \subset Mat_n(\mathbb{R}) \overset{metr}{\simeq} \mathbb{R}^{n^2}$$

הגדרות: (X,d) מ"מ, $A\subseteq X$.

א) **"הסגור של A"** $(Closure\ of\ A)$:

$$A\underbrace{\subseteq}_{m_1}\bar{A}=cl(A):=\{x\in X|\ d(x,A)=0\}$$

ב) **"סגור סדרתי"** $(sequential\ closure)$:

$$A\underbrace{\subseteq}_{\substack{\text{סדרה קבועה}\\ \text{תמיד מתכנסת!}}} scl(A):=\left\{x\in X\middle|\exists a_n\in A: x=\lim_{n\to\infty}a_n\right\}$$

הערה: נניח $A\subset\mathbb{R},\sup A<\infty$. אזי $\sup A\in cl(A)$. דומה לגבי $\inf A$.

משפט 1: בכל <u>מ"מ</u> תמיד $\boxed{scl(A)=cl(A)}$.

הוכחה: $(\subseteq)$: נניח $z\in scl(A)$ אז

$$\begin{cases}\exists a_n\in A\\ z=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\end{cases}$$

$$d(z,a_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\Rightarrow d(z,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}})=0$$

$$0\le d(z,A)\le d(z,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}})\Rightarrow d(z,A)=0$$

$$\Rightarrow z\in cl(A)$$

$(\supseteq)$:

$$z\in cl(A)$$

$$\Rightarrow\inf_{a\in A}d(z,a)=d(z,A)=0$$

(לפי הגדרת inf) נקבל שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $a_n\in A$ כך ש

$$\forall n\in\mathbb{N}:0\le d(z,a_n)\le\frac{1}{\underbrace{n}_{\to 0}}$$

מכאן $a_n\in A\wedge\lim\limits_{n\to\infty}a_n=z\in scl(A)$

☺

משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ): נניח (X,d) מ"מ, $A\subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

1) A סגורה ב X (ז"א משלים לפתוחה).

2) $A=scl(A)$ (A סגורה לגבי הגבולות).

3) $A=cl(A)$.

4) A "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה $X\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ כך ש - $A=f^{-1}(0)$).

<u>הוכחה:</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח בשלילה ש - $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש - $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' –

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \;, \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \;, \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

A סגורה (נתון). ז"א A^c <u>פתוחה</u>!

ואז z נקודה פנימית של A^c.

$$\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה a_n לא נמצה בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

$(2) \Leftarrow (3)$: בגלל משפט 1.

<u>$(3) \Leftarrow (4)$:</u>

נגדיר $\left(\text{רציפה !}\right)$ $f_A : X \to \mathbb{R}$ $\quad f_A(x) = d(x, A)$

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \underbrace{=}_{\text{נתון 3}} A$$

ולכן $f_A^{-1}(0) = A$.

<u>$(4) \Leftarrow (1)$:</u>נפעיל "תוספת למשפט $Heine$" (מקור לסגור גם סגור) $f^{-1}(0)$ מקור של נקודון.

☺

<u>הגדרה:</u> במ"מ (X, d) עבור $A \subseteq X$, נגדיר

$$A' := \{x \in X | x \in cl(A \backslash \{x\})\} \overset{metr}{=} \{x \in X | x \in scl(A \backslash \{x\})\} \subset cl(A)$$

נקודות ההצטברות של A.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A **עם איברים שונים** שמתכנסת ב X לנקודה z.

<u>רמז:</u> ראו בהרצאה 1 משפט (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש

$d(z, A\backslash\{z\}) = 0$ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש z לא מבודדת).

דוגמאות:

1) $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

2) $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \middle| n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.

$$A' = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(0, \frac{1}{m}\right)\right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

3) $A=[0,1] \subset \mathbb{R}$

אז

$$A' = A$$

תכונות (במ"מ): (בתירגול או לבדוק לבד!).

א) $cl(A) = A \cup A'$.

ב) A סגורה $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

הגדרה: אומרים שתת קבוצה A ב- X היא:

א) **"קבוצה G_δ"** אם A שווה לחיתוך **בן מנייה** של קבוצות פתוחות.

(ז"א $\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$).

ב) **"קבוצה F_σ"** אם A שווה לאיחוד **בן מנייה** של קבוצות סגורות.

(ז"א $\forall n:$ סגורה P_n , $\exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n\in N} P_n$).

הערה: $A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma$

למשל: כל נקודון **קבוצה G_δ** וגם F_σ **(מדוע ?)** בכל מ"מ

תרגיל:

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמרחב מטרי (X, d):

א) כל קבוצה סגורה היא G_δ.

ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ

<u>הגדרה:</u> A נקראת קבוצה **סגוחה** (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

<u>דוגמאות:</u>

1) $A=(0,1)$ פתוחה ולא סגורה ב $X=\mathbb{R}$.

2) $A=[0,1]$ סגורה ולא פתוחה ב $X=\mathbb{R}$.

3) $A=[0,1)$ לא סגורה ולא פתוחה ב $X=\mathbb{R}$.

4) $\mathbb{R},\emptyset$ סגוחות ב - $\mathbb{R}$.

<u>הערה:</u> לכל מרחב (X,d) – תת קבוצות $X,\emptyset$ תמיד סגוחות (כי $X=\varnothing^c$, $\varnothing=X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

<u>הגדרה:</u> מרחב (X,d) נקרא **קשיר** (*connected*) אם קבוצות סגוחות במרחב הן **רק** $X,\emptyset$.

<u>הגדרה שקולה להיות **לא קשיר**:</u> אם קיים פירוק $X=X_1\dot{\cup}X_2$ כך ש –

$\begin{cases} X_1\neq\emptyset\,,X_2\neq\emptyset \\ X_1,X_2\in top(d)\ (\text{פתוחות}) \\ X_1\cap X_2=\emptyset \end{cases}$ (שימו לב ש X_1,X_2 <u>סגוחות</u> לא טריוויאליות)

<u>למשל:</u> אם: $\underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}}=[2,4)\cup(5,\infty)\subset\mathbb{R}$

אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ **סגוחה** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

דומה עבור $[2,4)$ (למשל 2 נק' פנימית ב $[2,4)$ כי $B_{\frac{1}{2}}(2)=[2,2.5)\subseteq[2,4)$).

<u>עוד דוגמה:</u> מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$\mathbb{R}\supset\mathbb{Q}$$

$$X_1=\left(-\infty,\sqrt{2}\right)\cap\mathbb{Q}$$

$$X_2=\mathbb{Q}\cap\left(\sqrt{2},\infty\right)$$

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) כל כדור פתוח קבוצה סגוחה.

הסיקו ש $(\mathbb{Z},d_p)$ לא קשיר.

משפט: (*תכונות בסיסיות של מרחב מטרי שלם*)

1. שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כתת מ"מ).

2. נניח (Y,d_Y) תת מרחב מטרי של (X,d). אז אם (Y,d_Y) שלם אז Y סגורה ב X.

הוכחה: בתירגול

השלמה של מרחב מטרי

הגדרה: **השלמה** של מ"מ (X,d) הוא

שיכון איזומטרי $M \overset{i}{\hookrightarrow} (X,d)$, כאשר M **מ"מ שלם** ומתקיים: $cl(i(X)) = M$.

הערה:

קל לבדוק שהסגור $cl(A)$ של A בכל מרחב הוא תמיד קבוצה סגורה.

(וזה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך)

משפט (שיכון למרחב $\boldsymbol{Banach}$): לכל מ"מ (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב Banach.

הוכחה: למדנו על מרחב $\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right) \in Banach$.

$$l_\infty(X) = \left\{f: X \to \mathbb{R} \middle| \text{חסומה } f(X)\right\}$$

$$\|f\|_{sup} \coloneqq \sup_{x\in X}|f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את X לתוך $l_\infty(X)$:

נבחר $z \in X$. ונגדיר – $\varphi: X \to l_\infty(X)$

$$a \mapsto \varphi(a) = \hat{a} \qquad \hat{a}: X \to \mathbb{R} \quad \boxed{\hat{a}(x) = d(a,x) - d(z,x)}$$

$\hat{a} \in l_\infty(X)$, ז"א $\hat{a}$ פונקציה חסומה כי

$$|\hat{a}(x)| = |d(a,x) - d(z,x)| \le \underbrace{d(a,z)}_{\text{קבוע}}$$

מ"ל $\forall a,b \in X: \boxed{d(a,b) = \left\|\hat{a} - \hat{b}\right\|}$.

$$\left\|\hat{a} - \hat{b}\right\| = \sup_{x\in X}\left|\left(d(a,x) - d(z,x)\right) - \left(d(b,x) - d(z,x)\right)\right| =$$

$$= \sup_{x\in X}|d(a,x) - d(b,x)| \le d(a,b)$$

מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל

$$\left\|\hat{a} - \hat{b}\right\| = \sup_{x\in X}|d(a,x) - d(b,x)| \ge \quad |d(a,b) - 0| = d(a,b)$$

☺

הרצאה 4

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X,d) יש השלמה.

הסבר ב 2 דרכים:

<u>דרך I:</u> הוכחנו שלכל (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$

$\varphi: X \to l_\infty(X)$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות. ($\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right)$ מרחב $Banach$).

$\overline{\varphi(X)} \subset l_\infty(X)$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

אז קיבלנו השלמה $X \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \overline{\varphi(X)} = cl(\varphi(X))$

☺

<u>דרך II:</u> "דרך סדרות קושי" (הוכחה מקוצרת - רק שלבים בסיסיים). הוכחה מפורטת אפשר למצוא למשל בספר "טופולוגיה קבוצתית",ד. ליבוביץ (האוניברסיטה הפתוחה) חלק א.

הרעיון מאוד דומה להשלמה $\mathbb{Q} \overset{i}{\hookrightarrow} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ של מרחב רציונליים. כשאנחנו מגדירים מספר ממשי כמחלקת שקילות של סדרות קושי ברציונליים.

<u>שלב א':</u> עבור מ"מ נתון (X,d) נגדיר קבוצה – $\tilde{X} := \{$סדרות קושי ב $(X,d)\}$

נגדיר פסאודו-מטריקה באופן טבעי: לכל זוג של ס"ק $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$

נגדיר $\tilde{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי וקל לבדוק ש $d(x_n, y_n)$ ס"ק ב $\mathbb{R}$

(רמז: שימו לב $|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \le d(x_n,x_m) + d(y_m,y_n)$).

לכן הסדרה $d(x_n,y_n)$ באמת מתכנסת ב $\mathbb{R}$ כי $\mathbb{R}$ שלם.

$(\tilde{X}, \tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי.

<u>שלב ב':</u>

<u>**טענת עזר**</u>: (*מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי*)

נניח $(\tilde{X}, \tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים ממנו מרחב מטרי מנה שמקבלים באופן הבא.

על מרחב פסאודו-מטרי $(\tilde{X},\tilde{d})$ מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x\Omega y \overset{def}{=} \tilde{d}(x,y)=0$$

נקבל קבוצת מנה: $M:=\tilde{X}/\Omega=\{[x]\ \text{מחלקות שקילות}\}$

$$[x]:=\{y\in\tilde{X}|\tilde{d}(x,y)=0\}$$

נגדיר ב M מרחק טבעי (דרך הנציגים): $\bar{d}([x],[y])=\tilde{d}(x,y)$.

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה. אז: $(\mathrm{M},\bar{d})$ מרחב מטרי,

הפונקציה $(\tilde{X},\tilde{d})\to(\mathrm{M},\bar{d}),\ x\mapsto[x]$ היא על ושומרת מרחקים.

נחזור למשפט. נפעיל "טענת עזר" על מרחב פסאודו-מטרי שלנו $(\tilde{X},\tilde{d})$ של ס"ק.

נגדיר שיכון: $x\mapsto[\tilde{x}]\qquad X\overset{i}{\hookrightarrow}M$

כאשר $\tilde{x}\in\tilde{X}$ סדרה קבועה $x,x,x\ldots$. אז מתקיימים תנאים הבאים:

i שיכון איזומטרי.

$$d(x,y)=\bar{d}([\tilde{x}],[\tilde{y}])$$

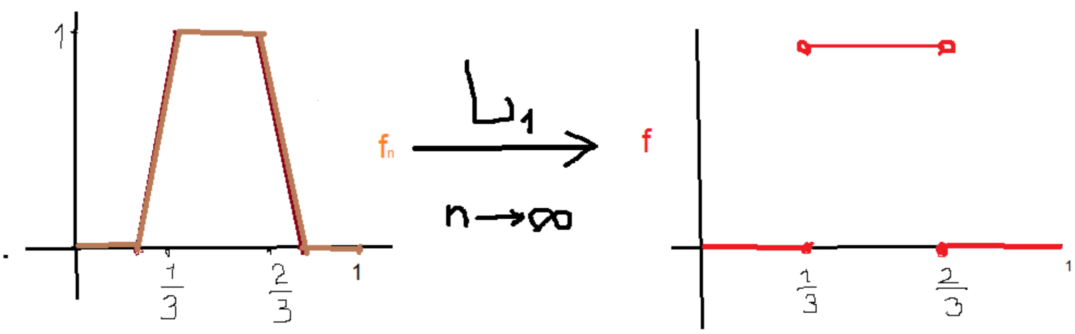
$$\overline{\iota(X)}=M$$

(M,ρ) מרחב שלם. ☺

<u>דוגמה 1</u>: $\mathbb{Q}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^n=\overline{\mathbb{Q}^n}$.

<u>דוגמה 2</u>: $L_1[a,b]\ \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow}\ (C[a,b],d_1)$, כאשר $L_1[a,b]$ פונקציות אינטגרביליות.

$(C[a,b],d_1)$ לא שלם!



(f_n) ס"ק ב - $(C[a,b],d_1)$ אבל לא מתכנס ב - $(C[a,b],d_1)$.

כן מתכנס במרחב (גדול יותר) $L_1[a,b]$:

כאשר: $E = \left\{ f \middle| \int_a^b |f| dx = 0 \right\}$.

$\widetilde{L_1}$ מרחב פסאודו-נורמי ! (אומרים יותר: סמי-נורמי). $L_1[a,b] = \widetilde{L_1}/E$ מרחב המנה והוא מרחב בנך של פונקציות אינטגרביליות על $[a,b]$.

3) $L_2[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow} (C[a,b], d_2)$. מקבלים מרחב הילברט פונקציונלי.

<u>**תזכורת:**</u> $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

למשל עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$

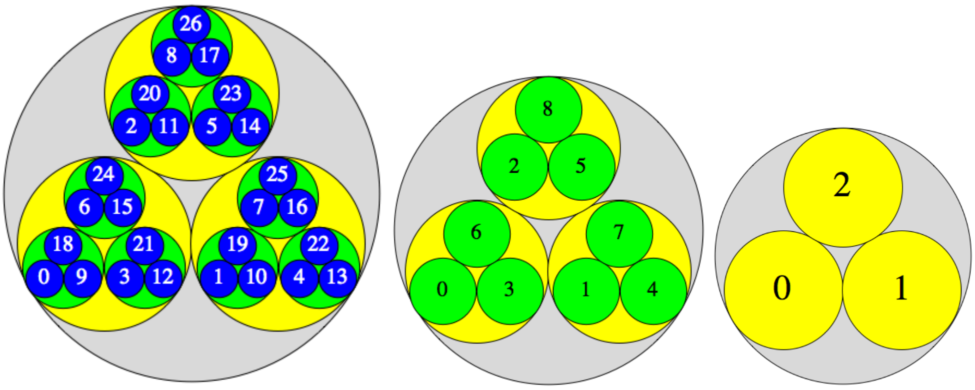
סדרת קושי שלא מתכנסת ב X.

דוגמה 4: $(\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_p}) \hookleftarrow (\mathbb{Z}, d_p)$ כאשר: השלמה היא

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{\text{שלמים } p - \text{אדיים}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k \,, b_k \in \underbrace{\{0,1,\ldots,p-1\}}_{p \text{ שאריות מודולו}} = \mathbb{Z}_p \right\}$$

שהוא קומפקטי (ולכן גם שלם) ! בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

<u>**שאלה**</u>: כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_3})$ לפי התמונות הבאות ?



....

מרחבים טופולוגיים

הגדרה: תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תת הקבוצות $\tau \subseteq \{A | A \subseteq X\} =: P(X)$ נקרא **טופולוגיה על קבוצה X** אם מתקיימים התנאים הבאים:

t_1) $\emptyset, X \in \tau$.

t_2) (חיתוכים סופיים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in \{1,2, \dots, n\} \Leftarrow O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \in \tau$

(מספיק עבור $n = 2$).

t_3) (איחודים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in I \Leftarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

אם מתקיימים הנ"ל, אז נאמר ש - (X, τ) הוא **מרחב טופולוגי** $(Topological\ space)$ ונרשום בקיצור מ"ט.

הגדרות נוספות:

א) אומרים ש - $A \subseteq X$ היא תת קבוצה **פתוחה** (במ"ט (X,τ)) אם

$$\boxed{A \text{ פתוחה} \overset{def}{=} A \in \tau}$$

ב) תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת קב' **סגורה** (במ"ט (X, τ)) אם המשלים קבוצה פתוחה, ז"א

$$\boxed{A \text{ סגורה} \overset{def}{=} A^c \text{ פתוחה}}$$

דוגמאות:

1) לכל מרחב פסאודו-מטרי (X, d): $\big(X, top(d)\big)$ מרחב טופולוגי (לבדוק!).

כאשר $top(d) = \{d \text{ קבוצות פתוחות במובן }\}$.

הגדרה: אומרים שמ"ט (X, τ) הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה d כך ש $\boxed{\tau = top(d)}$

באופן דומה אפשר להגדיר: מרחב טופולוגי **פסאודו-מטריזבילי**

משפט (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות): לכל מ"ט (X, τ) מתקיים:

t_1^c) $X, \emptyset$ סגורות.

t_2^c) איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור.

t_3^c) כל חיתוך קב' סגורות שוב סגור.

הוכחה: כללי $de\ Morgan \wedge$ הגדרת TOP.

<u>הגדרה</u>: **קבוצה סגוחה** = סגורה+פתוחה.

2) "טופולוגיה טריוויאלית": $\tau_{tr} := \{\emptyset, X\}$. (X, τ_{tr}) **מרחב טריוויאלי**.

<u>הערה</u>: מ"ט (X, τ_{tr}) תמיד פסאודו-מטריזבילי: כי $\tau_{tr} = top(d_0)$. כאשר $d_0(x,y) = 0$.

3) "**טופולוגיה דיסקרטית**": $\tau_{discr} := P(X) = \{X - \text{תת קבוצות ב}\}$

(כאן כל תת קבוצה היא פתוחה, בעצם סגוחה)

<u>שימו לב</u>: בין היתר, כל נקודון $\{x\}$ קבוצה פתוחה (שקול לדיסקרטיות בגלל t_3).

<u>הגדרה</u>: נקודה a במרחב טופולוגי (X, τ) נקראת **מבודדת** $(isolated)$ אם $\{a\} \in \tau$

(נקודון פתוח!).

<u>לכן</u>: מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי $\Leftrightarrow$ כל נקודה מבודדת בו.

<u>הערה</u>: מרחב דיסקרטי הוא תמיד מטריזבילי. $\tau_{discr} = top(d_\Delta)$ (d_Δ מטריקת 0-1).

<u>הערה</u>: לכל טופולוגיה τ מתקיים: $\{\emptyset, X\} = \tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr} = P(X)$

<u>הגדרה</u>: נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 2 טופולוגיות על אותה קבוצה X. אז אומרים ש - τ_2 **חזקה** יותר מ - τ_1, ואומרים ש - τ_1 **חלשה** יותר מ - τ_2.

4) $X = \{0,1\}$ ונגדיר – $\tau_* := \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ טופולוגית Sierpinski

$\{0\}$ מבודדת, $\{1\}$ <u>לא</u>. מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

<u>הגדרה (תת מרחב טופולוגי)</u>: יהי $(X, \tau) \in TOP$, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

מגדירים **טופולוגית תת מרחב** מעל Y: $\tau_Y := \{ O \cap Y | O \in \tau\}$

תבדקו ש $(Y, \tau_Y) \in TOP$

<u>הערה</u>: $\{metric\ spaces\} = Metr \to TOP = \{topological\ spaces\}, (X, d) \mapsto (X, top(d))$

א) לא על.

ב) לא חח"ע.

<u>הסבר ב'</u>: (שקילות טופולוגית של מטריקות)

<u>הסבר א'</u>:   שקול להגיד: שלא כל מ"ט הוא מטריזבילי.

<u>דוגמה:</u>

- מ"ט טריוויאלי (X,τ_{tr}) עם X לא נקודון--- לא מטריזבילי (אבל פסאודו-מטריזבילי).
- $X\coloneqq\{0,1\}$. (X,τ_*) מ"ט אבל לא מטריזבילי (אפילו לא פסאודו-מטריזבילי!).

$$\tau_*=\left\{\underbrace{\emptyset,\{0\},\{0,1\}}_{\text{פתוחות}}\right\}. \qquad \left\{\underbrace{\{0,1\},\{1\},\emptyset}_{\text{סגורות}}\right\}$$

<u>הסבר:</u>

<u>הסבר קצר שהמרחב לא מטריזבילי:</u> $(\{0,1\},\tau_*)\notin Metriz$

נקודון $\{0\}$ לא קבוצה סגורה! מצד שני, בכל מ"מ, כל נקודון סגור!

נוכיח יותר: ש - $(\{0,1\},\tau_*)$ לא פסאודו-מטריזבילי. נניח בשלילה שכן ...

נניח בשלילה שיש פסאודו-מטריקה ρ על $\{0,1\}$ כך ש – $top(\rho)=\tau_*$.

<u>2 מקרים:</u>

1) $\rho(0,1)=0$ ואז $\rho=d_0$. מצד שני, $top(d_0)=\{\emptyset,\{0,1\}\}\neq\tau_*$.

2) $\rho(0,1)>0$. כאן – $top(\rho)=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}\supsetneq\tau_*$

כי כל הנק' מבודדות ולכן המרחב הוא דיסקרטי.

5) "טופולוגיה קו-סופית":

לכל קב' $X\neq\emptyset$ נגדיר – $\tau_{cof}\coloneqq\{F^c:\text{סופית } F\subseteq X\}\cup\{\emptyset\}$

שאלה: מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

לבדוק:(X,τ_{cof}) מ"ט אבל לא תמיד מטריזבילי (תלוי בעוצמה של X).

$(\mathbb{R},\tau_{cof})=\{F^c\subseteq\mathbb{R}|\text{סופית } F\subset\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset\}\notin Metriz$

<u>רמז:</u> לנקודות שונות אין "סביבות" פתוחות זרות.

<u>הגדרות:</u>

יהי (X,τ) מ"ט.

1) תת קבוצה $V\subseteq X$ נקראת **סביבה לנק'** $\boldsymbol{a\in X}$ אם קיימת קבוצה פתוחה O $(\in\tau)$

כך ש $a\in O\subseteq V$.

נסמן $V\in N(a)$, כאשר $N(a)$ סביבות של a.

אומרים **סביבה פתוחה** אם V פתוחה.

<u>אזהרה:</u> <u>סביבה</u> לא חייבת להיות פתוחה.

2) באופן דומה נגדיר **סביבה V לתת קבוצה $S \subseteq X$** אם

$$\exists O \in \tau: \quad S \subseteq O \subseteq V$$

נסמן $V \in N(S)$, כאשר $N(aS)$ סביבות של A.

3) אומרים שנקודה a היא **נק' פנימית** של קבוצה $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$.

הסימון: $a \in int(A)$ או $a \in A^{\circ}$.

בעצם זה מגדיר את ה"פנים" של A: $int(A)$ (כאוסף של נקודות פנימיות).

הערה: תמיד $int(A) \subseteq A$.

טענה: $int(A) = A \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{קריטריון לפתיחות}} A$ פתוחה $(A \in \tau)$.

הסבר: שימוש ב t_3 $\qquad A = \bigcup_{a \in A} O_a \in \tau$ ...

הערה חשובה: הרבה הגדרות במ"ט מתקבלות מהגדרות על מ"מ כשמחליפים ε-סביבות בסביבות. למשל: התכנסות סדרות, רציפות פונקציות, ...

הגדרה: **התכנסות סדרות**

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} X \quad n \longmapsto f(n) = x_n$$

לסדרה x_n במ"ט (X, τ) מגדירים גבול (אם קיים!) באופן הבא:

אומרים ש - $a \in X$ **גבול** של סדרה $x_n \in X$ אם לכל סביבה (פתוחה) U של a כמעט כל האיברים נמצאים בסביבה U. ז"א

$$\forall\, U \in N(a)\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U \qquad (n_0 \text{ תלוי בסביבה } U)$$

סימון: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ או $x_n \xrightarrow{\tau} a$.

הגדרה: **רציפות פונקציות**

נייח $(X, \tau), (Y, \sigma)$ מ"ט. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת *רציפה בנקודה* $a \in X$ אם:

$$\forall U \in N(f(a)) \quad \exists V \in N(a) \quad f(V) \subseteq U$$

אומרים *רציפה* אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$. סימון: $f \in C(X, Y)$.

הערה: (כמו במ"מ) פונקציה $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ בין 2 מ"ט **רציפה** אם"ם

$$\boxed{\forall O \in \sigma: f^{-1}(O) \in \tau}$$

ז"א מקור לפתוח הוא פתוח (ניתן לנסח עבור סגור).

תרגיל: הוכיחו ש $f: X \to Y$ רציפה בכל נקודה $a \in X$ אם"ם $f^{-1}(O) \in \tau \quad \forall O \in \sigma$.

<u>הגדרה:</u> X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), כלומר: $X \in T_2$

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

<u>משפט:</u> (יחידות הגבול) במרחב טופולוגי (X, τ) עם תכונה T_2 $(Hausdorff)$, גבול של סדרה תמיד יחיד, אם קיים.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה ש $\begin{cases} a \neq b \\ X \in T_2 \end{cases}$

$\Leftarrow$ קיימות <u>סביבות זרות</u> $U \in N(a), V \in N(b)$ כך ש - $U \cap V = \emptyset$.

U מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n, <u>וגם</u> V מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה ...

סתירה! ☺

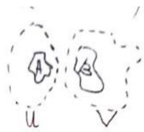
<u>אקסיומות הפרדה נוספות</u>:

<u>הגדרות:</u> נניח $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. אומרים:

א) קיימת **הפרדה סביבתית** של A, B (במ"ט (X, τ)) אם

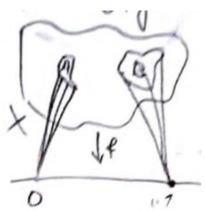
$$\exists\, U \in N(A), V \in N(B): U \cap V = \emptyset$$

(ז"א אם קיימות סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות).



ב) קיימת **הפרדה פונקציונלית** במובן $Urysohn$ אם:

$$\exists f \in C(X, [0,1]): f(A) = 0, f(B) = 1$$



<u>טענה:</u> מהפרדה פונקציונלית נובעת מהפרדה סביבתית.

<u>הוכחה:</u> ניקח סביבות פתוחות זרות של 0,1 ב - $[0,1]$.

$$\underbrace{U := \left[0,\frac{1}{3}\right)}_{0\in} \cap \underbrace{V := \left(\frac{2}{3},1\right]}_{1\in} = \emptyset$$

$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in N(A)} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in N(B)} = \emptyset$$

ומצאנו הפרדה סביבתית של A,B. ☺

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_0**, כלומר: $(X,\tau) \in T_0$ $(Kolmogorov)$ – אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

1) $\exists U \in N(a): b \notin U$

או

2) $\exists V \in N(B): a \notin V$

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_1**,

כלומר: $X \in T_1$ אם מתקיימים שתי התנאים מקודם ((1) **וגם** (2)).

תרגיל: התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in T_1$

2) כל נקודון סגור.

3) כל תת קבוצה סופית F היא סגורה. (רמז: (t_2^c))

הערה: תמיד $(X,\tau_{cof}) \in T_1$, בעצם τ_{cof} טופולוגיה הכי קטנה על X שמקיימת את תכונה T_1.

הגדרה (תזכורת): X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2),

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_3**, כלומר: $X \in T_3$, אם מתקיימים שני תנאים:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה B $a \notin B$ יש הפרדה סביבתית. רמז: ניקח נקודון $B := \{b\}$

אומרים גם: $Regular\ spaces = T_3$ (ולעיתים רק תנאי $Regular = T_3$(ב))

הערה: $T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$

הגדרה: X מקיימת **תכונת $T_{3\frac{1}{2}}$**, כלומר: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, אם:

(א) $X \in T_1$.

$(ב)^f$ לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה B $a \notin B$ קיימת הפרדה פונקציונלית.

__הערות:__

- מהטענה $\Leftarrow$ $T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}}$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים גם תכונת Tychonoff או *רגולרי לחלוטין*

(לעיתים רק על $(ב)^f$ $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים – Completely Regular = רגולרי לחלוטין).

__הגדרה:__ X מקיימת **תכונת T_4**, כלומר: $X \in T_4$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

(כלומר $\exists\, U \in N(A), \exists\, V \in N(B): U \cap V = \emptyset$).

__הערות:__

- לעיתים אומרים $Normal\ Space$ = מרחב נורמלי.

  (ולעיתים אומרים נורמלי על $T_4(ב)$ בלבד)
- לא קל להבין מדוע $X \in T_4 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

נובע מהמשפט הבא:

__משפט $Urysohn$:__ יהי $X \in T_4$. אז לכל זוג A, B קבוצות __סגורות__ __זרות__ קיימת הפרדה פונקציונלית של A, B.

החלק הלא טריוויאלי בהוכחה נובע מ $"Onion\ Argument"\ of\ Urysohn$.

$$TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4 \supset Metriz$$

Spoiler : בהמשך נוכיח $T_4 \supset Metriz$, $T_4 \supset Comp \cap T_2$, וגם את משפט Urysohn.

__הערה:__ לכל ההכלות הנ"ל, יש דוגמאות נגדיות (הן הכלות **ממש**).

ראו קובץ באתר של המרצה – [some examples]

1) $(\{0,1\}, \tau_{tr}) \in Top$
$(\{0,1\}, \tau_{tr}) \notin T_0$

2) $(\{0,1\}, \tau_*) \in T_0$ (כי $1 \notin \{0\} \in N(0)$)
$(\{0,1\}, \tau_*) \notin T_1$ (כי $\{0\}$ לא סגור)

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1$ (כל נקודון $\{a\}$ סגור כי $X \setminus \{a\} \in \tau_{cof}$)
$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \notin T_2$

תזכורת: $\tau_{cof} := \{F^c \mid F \subseteq \mathbb{R}\ \text{סופית}\} \cup \{\emptyset\}$

<u>הערה</u>: $(X,\tau_{cof}) \notin T_2$ לכל X <u>אינסופית</u>.

בעצם זה לכל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות.

$U,V \in \tau_{cof}$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$ כי $U := F_1^c, V := F_2^c$

ולכן $U \cap V = F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c \underbrace{=}_{\text{אם נניח}} \emptyset$

אז $X = \underbrace{F_1 \cup F_2}_{\text{סופית}}$

בסתירה! ☺

<u>הגדרה</u>: הסגור - ***closure***: עבור $A \subseteq X$ נגדיר

$$z \in cl(A) = \bar{A} \overset{def}{=} \forall V \in N(z): V \cap A \neq \emptyset$$

$cl(A)$ "הנקודות הכי קרובות" ל A.

<u>הערה</u>: תמיד $A \subseteq cl(A)$.

<u>תרגיל</u>: $A = cl(A) \Leftrightarrow A$ סגורה.

<u>הגדרה</u>: $A \subseteq X$. נגדיר את **הסגור הסדרתי** לפי:

$$z \in scl(A) \overset{def}{=} \exists a_n \in A: a_n \overset{\tau}{\to} z$$

<u>טענה</u>: במ"ט תמיד $A \subseteq scl(A) \subseteq cl(A)$.

<u>הוכחה</u>: הכלה ראשונה נובעת מזה שסדרות קבועות תמיד מתכנסות.

נניח $z \in scl(A)$. אז קיימת סדרה $a_n \in A$ שמתכנסת (במרחב X) ל z.

לכל סביבה $U \in N(z)$ כמעט כל האיברים של a_n נמצאים ב U. אז ברור $U \cap A \neq \emptyset$

לכן $z \in cl(A)$. זה מוכיח $scl(A) \subseteq cl(A)$.

☺

הרצאה 5

שאלה: א. למצוא מ"ט (X,τ) שבו לא תמיד $scl(\mathrm{A}) = cl(\mathrm{A})$

(ואז (X,τ) לא מטריזבילי).

ב. אותה שאלה אבל בתנאי נוסף ש $(X,\tau) \in T_2$.

דוגמה א: $(\mathbb{R},\tau_{coc})$ $\tau_{coc} := \{Y^c \subseteq \mathbb{R} : |Y| \le \aleph_0\} \cup \{\varnothing\}$

$[0,1] = scl([0,1]) \neq cl([0,1]) = \mathbb{R}$.

דוגמה ב: נגדיר $X := \mathbb{R} \cup \{p\}, p \notin$

$$\tau := \{O \subseteq X \,\middle|\, p \in O \Rightarrow |O^c| \le \aleph_0 \}$$

ז"א אם $p \in O$, אז המשלים O^c הוא בן מנייה. נשים לב ש - $\forall x \neq p: \{x\} \in \tau$.

לבדוק:

- $(X,\tau) \in TOP$. לבדוק גם T_2.
- τ לא דיסקרטית (נק' p לא מבודדת).
- תת מרחב טופולוגי $Y := (\mathbb{R}, \tau_Y)$ של מ"ט הנ"ל הוא $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה דיסקרטית. ז"א $\tau_Y = P(\mathbb{R}) = \tau_{discr}$.
- לבדוק $\mathbb{R} = scl(\mathbb{R}) \neq \mathrm{cl}(\mathbb{R}) = \mathrm{X}$
- אם סדרה a_n מתכנסת ב (X,τ) אז היא קבועה לבסוף
- $id : (X,\tau) \to (X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה !
- **מסקנה: עיקרון $Heine$ כאן לא מתקיים!**
- $(X,\tau) \notin Metriz$.

תכונות $(int, cl, \partial$, סביבות$)$: במ"ט (X,τ)

1) $\forall a \in X: X \in N(a)$ (רמז: t_1).

2) חיתוך **סופי** של סביבות (פתוחות) גם סביבה (פתוחה). רמז: t_2.

3) $V \in N(a) \Leftarrow \begin{cases} U \in N(a) \\ V \supseteq U \end{cases}$

4) $\boxed{\underbrace{int(A)}_{A^\circ} \subseteq A \subseteq \underbrace{cl(A)}_{\bar{A}}}$.

5) לכל $A_1 \subseteq A_2$ מתקיים:

$$int(A_1) \subseteq int(A_2)$$

$$cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$$

$$scl(A_1) \subseteq scl(A_2)$$

6) קריטריון לפתיחות : $\boxed{A \text{ פתוחה} \Leftrightarrow int(A) = A}$

רמז: t_3. $A = \bigcup_{a \in A} O_a$

7) קריטריון לסגירות: $\boxed{A \text{ סגורה} \Leftrightarrow cl(A) = A}$

8) $A^{\circ\circ} = A^\circ$. (ז"א: $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$)

9) $A^\circ \in \tau$ (ז"א A° תמיד פתוחה).

10) $\boxed{(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ}$ (לכל מספר **סופי**).

11) A° = קב' פתוחה הכי גדולה בין תת קבוצות פתוחות של A, כלומר –

$$\bigcup \{O \subseteq X | O \subseteq A, O \in \tau\}$$

12) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (ז"א $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$)

13) $\bar{A}$ תמיד קב' סגורה.

14) $\bar{A}$ = קב' סגורה הכי קטנה בין קבוצות סגורות שמכילות את A. כלומר

$$\bigcap \{B \subseteq X | B \supseteq A, B \text{ סגורה ב } X\}$$

15) (הפרשים) נניח O פתוחה, B סגורה. אזי:

א. $O \setminus B$ פתוחה. ב. $B \setminus O$ סגורה.

הסבר: $O \setminus B = O \cap B^c$, $B \setminus O = B \cap O^c$.

16) **משפט הקשר** בין הסגור והפנים. תמיד מתקיים:

א. $\boxed{cl(A^c) = \left(int(A)\right)^c}$

שקול: ב. $int(A^c) = \left(cl(A)\right)^c$

הוכחה: א $\Leftrightarrow$ ב כי נוכל להציב $A := A^c$. מ"ל (א)

$$x \in \left(int(A)\right)^c$$
$$\Updownarrow$$
$$x \notin int(A)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : U \not\subseteq A$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : \ U \cap A^c \neq \emptyset$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in cl(A^c)$$

☺

17) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (לכל מס' **סופי**).

הגדרה: **השפה של A:** $\partial(A) := \overline{A} \setminus A^{\circ}$

18) $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

הסבר: $\partial(A) = \overline{A} \setminus A^{\circ} = \bar{A} \cap (A^{\circ})^c \underbrace{=}_{16\text{א.}} \bar{A} \cap \overline{A^c}$

19) $\partial(A)$ תמיד סגורה!

הסבר: כחיתוך של קבוצות סגורות (ראו 18).

20) $\boxed{\partial(A) = \partial(A^c)}$

21) (במ"מ (X,d)) $\partial(A) = \{x \in X | d(x,A) = 0, d(x,A^c) = 0\}$

הסבר: תכונות הסגור במ"מ...

22) $cl(A) = A \cup \partial(A) \quad \text{int}(A) = A \setminus \partial(A)$

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה A במ"ט (X,τ) נקראת *צפופה* אם $cl(A)=X$.

שקול: (קריטריון צפיפות) לכל קבוצה פתוחה לא ריקה O מתקיים $A\cap O\neq\varnothing$.

תרגיל: אם A צפופה ב X אז לכל קבוצה פתוחה O מתקיים: $cl(O)=cl(O\cap A)$.

<u>הגדרה</u>: מ"ט (X,τ) נקרא **ספרבילי** אם קיימת ת"ק צפופה <u>ובת מניה</u>.

סימון: $(X,\tau)\in \mathrm{Sep}$.

הערה: תמיד $cl(X)=X$. לכן תמיד X צפופה ב X. לכן מרחב טופולוגי בת מניה תמיד ספרבילי.

הערה: (*משפט* Weierstrass)

$(C[a,b],top(d_{\max}))=cl(P_{\mathbb{Q}}[a,b])=$ {פולינומים רציונליים}

לכן $(C[a,b],top(d_{\max}))\in Sep$.

<u>תרגילים מומלצים</u>:

- $\mathbb{R}^n\in \mathrm{Sep}$
- **הוכיחו**: $l_2\in \mathrm{Sep}$ (רמז: $A:=\{(q_1,q_2,\cdots)\in l_2 : q_k\in\mathbb{Q},\exists n\ \forall i>n\ \ q_i=0\}$)
- $(X,\tau_{discr})\in \mathrm{Sep}$ אם ורק אם X בת מניה.
- חיתוך של 2 (או מספר סופי) קבוצות פתוחות צפופות גם צפופה.
- יהי (X,d) מ"מ. תת קבוצה צפופה ב $(X,\mathrm{top(d)})$ אם ורק אם היא ε-צפופה לכל $\varepsilon>0$.

  הגדרה: A ε-צפופה ב (X,d) אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש $d(x,a)<\varepsilon$.

  שקול $\bigcup_{a\in A}B(a,\varepsilon)=X$.

* **הוכיחו**: $l_\infty\notin \mathrm{Sep}$

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה A במ"ט X נקראת <u>דלילה</u> (nowhere dense) אם $\mathrm{int}(cl(A))=\varnothing$.

למשל: קו ישיר דליל במישור. מישור דליל במרחב תלת ממדי.

נקודון במרחב מטרי דליל אם ורק אם היא לא מבודדת.

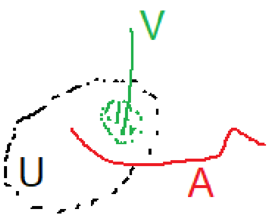
<u>משפט</u>: (**קריטריונים לקבוצות דלילות**) התנאים הבאים שקולים:

א. A דלילה במ"ט X (ז"א $\operatorname{int}(cl(A))=\varnothing$).

ב. $X\setminus cl(A)$ צפופה ב X.

ג. $cl(A)$ לא מכיל אף תת קבוצה פתוחה לא ריקה.

ד. לכל קבוצה פתוחה לא ריקה U קיימת קבוצה פתוחה V כך ש:
$V\cap A=\varnothing \quad \varnothing\neq V\subseteq U$.



הוכחה:

א $\Leftarrow$ ב

$\operatorname{int}(cl(A))=\varnothing$

$X\setminus\operatorname{int}(cl(A))=X$

מכאן, לפי **משפט הקשר**, נקבל

$cl(X\setminus cl(A))=X$

ב $\Leftarrow$ ג

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $\varnothing\neq O\subseteq cl(A)$. אז $O\cap(X\setminus cl(A))=\varnothing$.

מכאן $X\setminus cl(A)$ לא צפופה ב X (ראו קריטריון צפיפות).

ג $\Leftarrow$ ד

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $\varnothing\neq U$ כך שלכל ת"ק פתוחה $\varnothing\neq V\subseteq U$ מתקיים $V\cap A\neq\varnothing$

אז כל נקודה של U היא נקודת סגור של A. זאת אומרת $U\subseteq cl(A)$. סתירה לתנאי ג.

ד $\Leftarrow$ א

נניח בשלילה שלא. אז $U:=\operatorname{int}(cl(A))\neq\varnothing$. לכל ת"ק **פתוחה** $\varnothing\neq V\subseteq U$ מתקיים $\varnothing\neq V\subseteq\operatorname{int}(cl(A))\subseteq cl(A)$. אבל אז לפי הגדרת סגור $V\cap A\neq\varnothing$ סתירה לתנאי ד.

☺

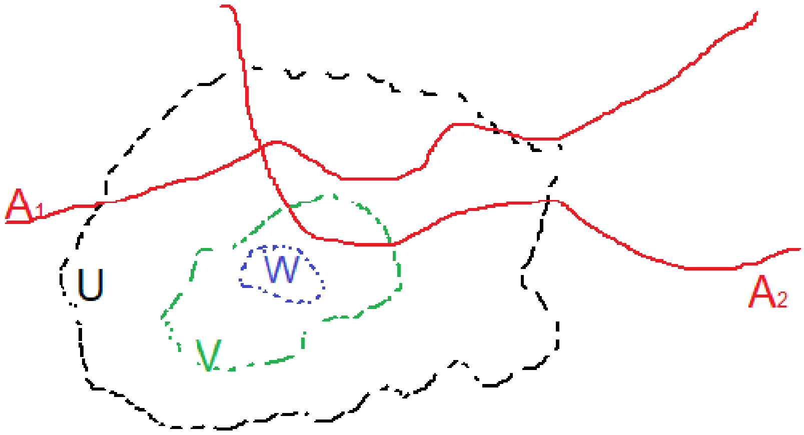
תרגילים מומלצים:

1. A דלילה ב X אם"ם $cl(A)$ דלילה ב X.
2. אם A דלילה ב X אז A^c צפופה ב X.
3. איחוד בן מניה של קבוצות דלילות לא תמיד קבוצה דלילה.

<u>טענה</u>: איחוד **סופי** של קבוצות דלילות גם קבוצה דלילה.

הוכחה:

נניח A_1, A_2 דלילות ב X. צ"ל $A_1 \cup A_2$ דלילה ב X.



נשתמש בסעיף ד של המשפט.

נניח U פתוחה לא ריקה. A_1 דלילה ב X. לכן קיימת ק"פ V כך ש $V \cap A_1 = \varnothing \quad \varnothing \neq V \subseteq U$.

A_2 דלילה ב X. לכן קיימת ק"פ W כך ש $W \cap A_2 = \varnothing \quad \varnothing \neq W \subseteq V$.

אז $W \cap (A_1 \cup A_2) = \varnothing \quad \varnothing \neq W \subseteq U$.

☺

<u>הגדרה</u>: מ"ט נקראת *מקטגוריה ראשונה* אם הוא איחוד בן מניה של קבוצות דלילות.

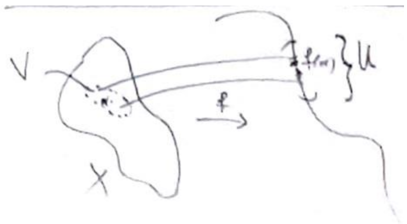
אחרת, הוא נקרא *מקטגוריה שניה*.

<u>הערה</u>: <u>משפט Baire</u> אומר שכל מרחב מטרי **שלם** הוא מקטגוריה שניה (ראו למשל "טופולוגיה קבוצתית" של האוניברסיטה הפתוחה, כרך א, עמוד 89).

<u>משפט יותר חזק</u>: לכל מרחב מטרי שלם (או לכל מרחב קומפקטי מקומית האסדורפית) חיתוך בן מנייה של קבוצות צפופות פתוחות הוא צפוף.

רציפות פונקציות

<u>תזכורת: (רציפות בנקודה):</u> נניח שנתונה פו' בין מ"ט $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$. f נקראת **רציפה בנקודה** $\boldsymbol{X \ni a}$ אם: $\boxed{\forall\, U \in N\big(f(a)\big)\ \exists\, V \in N(a): f(V) \subseteq U}$



<u>שקול:</u> $\forall\, U \in N\big(f(a)\big): f^{-1}(U) \in N(a)$

(מילולית: מקור של סביבה (ל $f(a)$) גם סביבה (ל a)).

<u>משפט (קריטריון לרציפות):</u> נניח $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. התנאים שקולים:

1) f רציפה (בכל נקודה).

2) מקור של כל קב' פתוחה גם פתוחה.

3) מקור של כל קב' סגורה גם סגור.

4) $\forall\, A \subseteq X: z \in cl(A) \Rightarrow f(z) \in cl\big(f(A)\big)$.

5) $f\big(cl(A)\big) \subseteq cl\big(f(A)\big)$.

<u>הוכחה:</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח $O \in \sigma$. צ"ל $f^{-1}(O) \in \tau$.

לכל $a \in f^{-1}(O)$ צ"ל ש $a \in int\big(f^{-1}(O)\big)$

(קריטריון לפתיחות: A פתוחה $int(A) = A \Leftrightarrow$).

$$a \in f^{-1}(O)$$
$$\Downarrow$$
$$f(a) \in O \in \sigma$$
$$\Downarrow$$
$$O \in N\big(f(a)\big)$$

הגדרת הרציפות בנקודה a

$$\Downarrow$$

$$a \in f^{-1}(O) \in N(a)$$

הגדרת נקודות פנים

$$\Downarrow$$

$$a \in int\left(f^{-1}(O)\right)$$

$(2) \Leftrightarrow (3)$: כי $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$.

$(4) \Leftrightarrow (5)$: ברור.

נוכיח $(3) \Rightarrow (5)$:

נניח $A \subseteq X$. צ"ל $f\left(cl(A)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$.

$$A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right) \subseteq f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

המעבר האחרון נובע מזה ש $f(A) \subseteq cl\left(f(A)\right)$. נפעיל "$cl$" בשני האגפים:

$$cl(A) \subseteq cl\left(f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)\right) \overset{(*)}{=} f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

(בהפעלת cl יש "מונוטוניות" $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$).

<u>הסבר $(*)$:</u>

א) $cl(B)$ סגור.

ב) נתון (3).

ג) B סגור $\Leftrightarrow cl(B) = B$.

כעת, נפעיל f על שני האגפים לקבל:

$$f\left(cl(A)\right) \subseteq ff^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$$

נוכיח $(4) \Rightarrow (1)$:

נניח בשלילה ש - (1) לא נכון. ז"א, f לא רציפה בנקודה מסוימת $a \in X$.

ז"א, קיימת <u>סביבה פתוחה</u> U של $f(a)$ כך ש - $f^{-1}(U) \notin N(a)$.

שקול: $a \notin int\left(f^{-1}(U)\right)$

שקול: $cl\left(f^{-1}(U)^c\right) \underbrace{=}_{\text{תכונת הקשר}} \left(int\left(f^{-1}(U)\right)\right)^c \ni a$

בגלל נתון (4) נקבל:

$$f(a) \in cl\big(f(f^{-1}(U)^c)\big) = cl\big(f(f^{-1}(U^c)\big) \subseteq cl(U^c) = U^c$$

(המעבר האחרון נובע כי U פתוחה ולכן $Y \setminus U$ סגורה, וסגור של סגורה שווה לעצמה).

קיבלנו: $f(a) \notin U$ בסתירה לנתון!

☺

משפט: ($\text{Heine-}\frac{1}{2}$) כל f רציפה שומרת על התכנסות סדרות.

הוכחה:

$$x_n \xrightarrow{\tau} a \underbrace{\Rightarrow}_{\text{צריך להוכיח}} f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(a)$$

שקול להוכיח – $\forall\, U \in N\big(f(a)\big)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

עבור $U \in N\big(f(a)\big)$ המקור $f^{-1}(U) \in N(a)$ (בגלל רציפות f בנקודה a).

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

וגם ידוע $f^{-1}(U) \in N(a)$ ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש – $x_n \in f^{-1}(U)$

מכאן $\forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

☺

הערה חשובה: במ"מ ההיפך גם נכון (עיקרון $Heine$). אבל זה לא תמיד נכון במ"ט ! (אפילו אם מתקיימת תכונת האוסדורף).

ראו דוגמה ב מתחילת ההרצאה

$id:(X,\tau) \to (X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה.

תכונות נוספות של פונקציות רציפות:

- כל $(X,\tau_{discr}) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ תמיד רציפה.
- כל $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\tau_{tr})$ תמיד רציפה.
- הרכבה $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ של פונקציות רציפות $f_1 : X_1 \to X_2$

  $f_2 : X_2 \to X_3$ היא גם רציפה.
- הוכיחו שבכל במ"ט (X,τ) ולכל $f_1, f_2 \in C(X)$ מתקיים :

א) $f_1 + f_2 \in C(X)$.

ב) $f_1 \cdot f_2 \in C(X)$.

ג) $\frac{f_1}{f_2} \in C(X)$ בתנאי ש - $f_2(x) \neq 0$ לכל $x \in X$.

הערה: נוח לבדוק "דרך סביבות".

משפט (תורשתיות של רציפות): $f: X \to Y$ רציפה, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ כך ש $f(A) \subseteq B$. אזי פונקציה מושרית $\boxed{\begin{matrix} A \xrightarrow{f_0} B \\ a \mapsto f(a) \end{matrix}}$ גם רציפה.

הוכחה:

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2 (ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O \cap B$ (כאשר $O \in \tau_Y$) ב – B מתקיים $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב- A.

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(O \cap B) &= \{x \in A | f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A \\ &= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \underbrace{=}_{f(A) \subseteq B} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{X\text{פתוחה ב-} \\ f \text{ בגלל רציפות}}} \cap A \end{aligned}$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב A (תת מרחב).

☺

הרצאה 6

שאלה כללית: אילו תכונות נשמרות על ידי "תמונה רציפה" ?

בהמשך נוכיח זאת עבור מספר תכונות. למשל : ספרביליות , קשירות,

קשירות מסילתית, קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית ...

(פונקציה **רציפה על** $f: X \to Y = f(X)$)

משפט: צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

הוכחה: נניח $f: X \to Y$ רציפה על, ז"א $f(X) = Y$.

צ"ל $\bar{A} = X \Leftarrow \overline{f(A)} = Y$.

שקול להוכיח $\overline{f(A)} = f(X)$.

לפי קריטריון (5) של רציפות מתקיים: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

נציב $\bar{A} = X$ ונקבל $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

מצד שני, $\overline{f(A)} \subseteq Y = f(X)$.

לכן קיבלנו: $\overline{f(A)} = f(X) = Y$

והוכחנו שנשמרת צפיפות.

עכשיו אם ניקח $X \in Sep$ אז קיים $A \subseteq X$ כך ש - $|A| \leq \aleph_0$, $\bar{A} = X$.

אז $\overline{f(A)} = f(X) = Y$.

$|f(A)| \leq \aleph_0$ גם בת מנייה! מכאן גם $Y \in Sep$.

☺

איזומורפיזמים במרחבים טופולוגיים

תזכורת: איזומורפיזם ב $Metr$ = איזומטריות.

איזומורפיזם ב TOP = $homeomorphism$.

הגדרה: נניח $(X_1, \tau_1) \xrightarrow{f} (X_2, \tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. f נקרא **הומיאומורפיזם**

(Homeomorphism *אזהרה: זה לא* Homomorphism)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

א) f חח"ע + על (ז"א קיימת <u>פונקציה</u> f^{-1}).

ב) f רציפה.

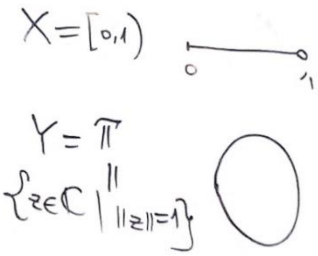
ג) f^{-1} רציפה.

<u>הערה:</u> $\begin{cases} (א) \\ (ב) \end{cases} \not\Rightarrow (ג)$ אפילו במקרים טבעיים.

<u>דוגמה 1:</u> $f = id : (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \to \mathbb{R}$ רציפה אבל לא $f^{-1} : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau_{discr})$

$\{0\} \in \tau_{discr}$ אבל $(f^{-1})^{-1}(0) = \{0\} \notin \tau$.

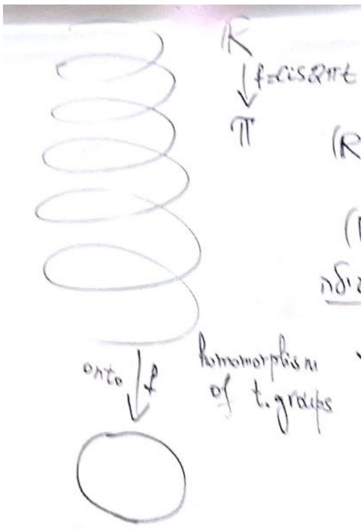
<u>דוגמה 2:</u> (גיאומטרית) $f : [0,1) \to \mathrm{T}$

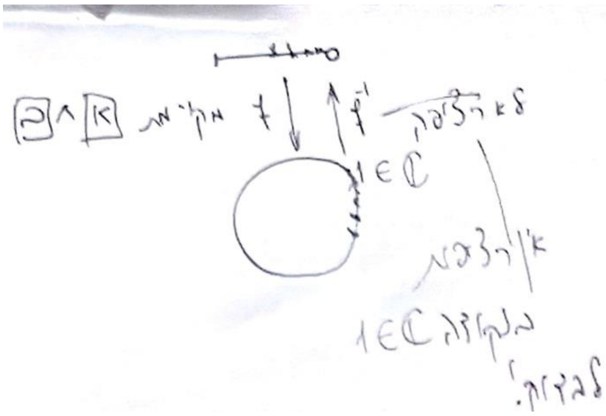


$$q : \mathbb{R} \to \mathrm{T} := \{z \in \mathbb{C} : \| z \| = 1\}, \quad q(t) = cis(2\pi t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$$

זאת פונקציה רציפה (וגם הומומורפיזם חבורות).

כעת נגדיר צמצום של פונקציה הנ"ל $f : [0,1) \to \mathrm{T}$.





אז $f : [0,1) \to \mathrm{T}$ רציפה חח"ע ועל

אבל $f^{-1} : \mathrm{T} \to [0,1)$ לא רציפה בנקודה $z = 1 \in T$.

(למצוא תת קבוצה פתוחה (סגורה) ב $[0,1)$ כך שהמקור לא פתוחה (לא סגורה) ב T)

<u>הגדרה:</u> נסמן $(X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$ אם קיים $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ $homeomorphism$ ונגיד

מרחבים **הומיאומורפיים**.

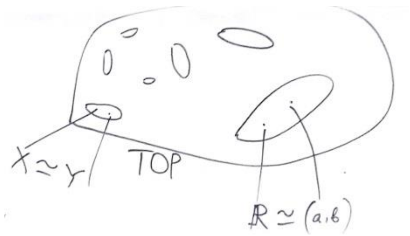
תכונות שמחלקות את TOP למחלקות :

1) $(X,\tau) \simeq (X,\tau)$.

2) $(X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2) \Leftarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2)$.

3) $\begin{cases}(X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2) \\ (X_2,\tau_2) \simeq (X_3,\tau_3)\end{cases} \Rightarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_3,\tau_3)$.

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב - id, בשביל (2) ב - f^{-1} ובשביל (3) $f_1 \circ f_2$).



<u>שאלה חשובה</u>: מתי 2 מרחבים טופולוגיים X,Y הם הומיאומורפיים

או ומתי לא ? $X \simeq Y$ או $X \not\simeq Y$

<u>שאלה יותר כללית</u>: מתי קיימת פונקציה רציפה **ועל** $X \xrightarrow{f} Y$ (ז"א מתי Y = "תמונה רציפה" של X).

<u>הערה</u>: מה התכונות שנשמרות ע"י הומיאומורפיזמים או ע"י תמונה רציפה ?

א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.

ב) כל תכונה מטרית נשמרת ע"י איזומטריה.

דוגמאות להומיאומורפיזמים:

- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם $f: X \to Y$ רציפה (הומיאומו') אז גם $f: A \to f(A)$ רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאומורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$: כפל בסקלר $c \neq 0$ תמיד הומיאומורפיזם
  $M_c: E \to E \in Lip_{|c|}$: $M_c(x) = c \cdot x$, $0 \neq c \in \mathbb{R}$ קבוע נתון.

$$\boxed{M_c^{-1} = M_{c^{-1}}}$$

- **<u>משפט</u>:** כל מרחב נורמי $\underbrace{\simeq}_{\text{הומיאומורפי}}$ לכל כדור פתוח שלו.

הוכחה:

שלב א' $\forall r > 0, \forall a \in E: B_r(a) \simeq B_1(0)$

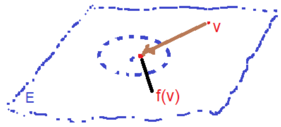
כי: $B_1(0) \underbrace{\simeq}_{M_r} B_r(0) \underbrace{\simeq}_{T_a} B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאומורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאומורפיזם.

שלב ב' מ"ל ש: $B_1(0) \underbrace{\simeq}_{f} E$.

נגדיר $\boxed{f(v) = \frac{1}{1+\|v\|} \cdot v}$ $\quad f : E \to B(0_E, 1)$

$1 > \frac{\|v\|}{1+\|v\|} = \|\frac{1}{1+\|v\|} v\| = \|f(v)\| \Leftarrow f(v) \in B(0_E, 1)$



$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|} \cdot x$ $\qquad f^{-1} : B(0_E, 1) \to E$

☺

תוצאות:

$\forall a < b \quad \mathbb{R} \simeq (-1,1) \simeq (a,b)$

$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \simeq B(v, r)$

$(-a,a) \times (-a,a) \simeq$ **עיגול פתוח** $\simeq \mathbb{R}^2$

(רמז: $\| \; \|$ שקול טופולוגית ל $\| \; \|_{max}$ ב $\mathbb{R}^2$)

הערה: הומיאומורפיזם לא תמיד שומר על תכונות מטריות (חסימות, שלמות, ...)

המשך דוגמאות:

- $[a,b] \simeq [c,d]$ כאשר $a < b$, $c < d$
- $(a,\infty) \simeq (c,d) \simeq (-\infty,b)$

(חלק מההסבר: $(0,\infty) \underset{\log_2}{\overset{2^x}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$).

תרגיל: למיין קטעים ב - $\mathbb{R}$:

א) עד כדי הומיאומורפיזמים (כן יחס שקילות!).

ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

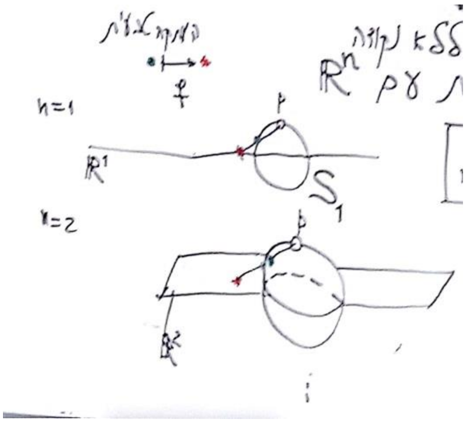
- היטל סטריאוגרפי

טענה: ספירה n מימדית S_n ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{S_n/\{z\} \simeq \mathbb{R}^n}$$

ניזכר כי: $S_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$

למשל: כאשר $n = 1,2$ נגדיר f לפי:



קשירות

הערה: לכל מ"ט (X,τ) תת קבוצות $\emptyset, X$ תמיד סגוחות (כי $X = \emptyset^c$, $\emptyset = X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

הגדרות: נניח (X,τ) מ"ט.

א) $X = X_1 \cup X_2$ נקרא **פירוק טופולוגי** אם:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1, X_2 \text{ פתוחות} \\ \text{לא ריקות} \end{cases}$$

לתנאי השני שקול – סגורות, וגם שקול – **סגוחות**.

ב) אומרים (X,τ) **קשיר** $(Connected)$ ונסמן: $(X,\tau) \in Conn$ אם **לא** קיים פירוק טופולוגי

<u>הערה חשובה</u>: (X,τ) **לא קשיר** אם ורק אם קיימת תת קבוצה סגוחה לא ריקה ששונה מ X.

- אם: $\underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} = [2,4) \cup (5,\infty) \subset \mathbb{R}$

  אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ ו $[2,4)$ **סגוחות** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

- מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$X_1 = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2}, \infty\right)$$

- הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) הוא לא קשיר.

<u>הגדרה:</u> נניח $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2) \in TOP$ כך ש - $X_1 \cap X_2 = \emptyset$,$X_1 \neq \varnothing, X_2 \neq \varnothing$.

מגדירים **סכום טופולוגי** $X = X_1 \sqcup X_2$ <u>כקבוצה</u> $X = X_1 \cup X_2$ עם <u>טופולוגיה</u> הבאה

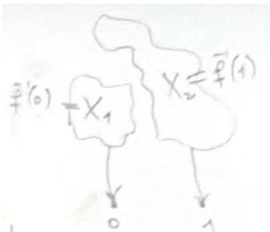
$$\tau \coloneqq \{O_1 \cup O_2 | O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שמרחב לא קשיר אם"ם הוא הומיאומורפי לסכום טופולוגי.

<u>משפט:</u> התנאים הבאים שקולים:

1) $(X,\tau) \notin Conn$ (ז"א לא קשיר).

2) קיימת פונקציה רציפה – $X \xrightarrow{f} [0,1]$ כך ש $f(X) = \{0,1\}$



<u>הוכחה</u>: $1 \Rightarrow 2$ לפי משפט רציפות ש"ל מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (יש 4 מקרים...)

$$f^{-1}(O) = \begin{cases} X & \{0,1\} \subset O \\ \varnothing & \{0,1\} \cap O = \varnothing \\ X_1 & \{0,1\} \cap O = \{0\} \\ X_2 & \{0,1\} \cap O = \{1\} \end{cases}$$

$2 \Rightarrow 1 \quad X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$ פירוק טופולוגי (מדוע ?)

☺

שימו לב: אין תכונת ערך ביניים! בהמשך זה נותן מחצית ל- "משפט ערך ביניים".

תרגיל: הוכיחו (הכללת המשפט הקודם) נקודות אי-רציפות של פונקציה האופיינית χ_A של $A \subseteq X$ היא $\partial(A)$. כאשר:

$$\chi_A : X \to \{0,1\},\ \chi_A(a) = 1 \quad \forall a \in A, \quad \chi_A(x) = 0 \quad \forall x \notin A$$

הערה: $A \subseteq X$ סגוחה אם ורק אם $\partial(A) = \varnothing$.

משפט: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח ש $X \in Conn$. מאחר ו- f על אז $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in Conn$.

אם נניח שלא, אז Y פריק טופולוגית: $Y = \underbrace{Y_1}_{\neq\emptyset} \sqcup \underbrace{Y_2}_{\neq\emptyset}$ כאשר Y_1, Y_2 פתוחות.

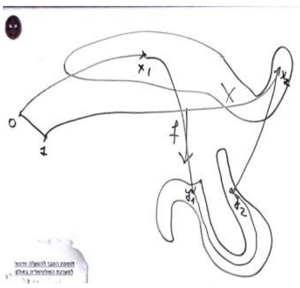
אזי $X = f^{-1}(Y_1) \sqcup f^{-1}(Y_2)$

כאשר $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \neq \emptyset$ (כי f היא פונקציה על) וגם הן **פתוחות** כי f רציפה.
קיבלנו ש X פריק, ז"א $X \notin Conn$ בסתירה!

הגדרה: מ"ט X **קשיר מסילתית** אם לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה מ x ל y. **מסילה** מ x_1 ל x_2 $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$. סימון: $X \in PConn$.

משפט: קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח ש - $X \in PConn$. f על ורציפה אז $f(X) = Y$. צ"ל - $Y \in PConn$.



נניח $y_1, y_2 \in Y$, אז קיימים $x_1 \xrightarrow{f} y_1$, $x_2 \xrightarrow{f} y_2$ כי f על.

קיימת מסילה מ x_1 ל x_2 $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$.

נגדיר מסילה – $[0,1] \xrightarrow{f\circ\varphi} Y \qquad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y$

ואז מצאנו מסילה בין y_1 ל - y_2.

☺

אזהרה: תמונה $f[0,1]$ של המסילה לא תמיד הומיאומורפי ל $[0,1]$.

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה **ועל** $f:[0,1]\to[0,1]^2$ (Peano curve).

__משפט:__ $PConn \subset Conn$.

הוכחה: נניח $X \in PConn$. צ"ל $X \in Conn$.

אם נניח בשלילה שלא, אז X פריק: $X = X_1 \sqcup X_2$

נבחר $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$X \in PConn \Leftarrow$ קיימת מסילה מ x_1 ל x_2, לכן

$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \quad \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$

כעת $[0,1] = \varphi^{-1}(X_1) \sqcup \varphi^{-1}(X_2)$

$\varphi^{-1}(X_1)$, $\varphi^{-1}(X_2)$ קבוצות זרות פתוחות (רציפות !)

לא ריקות $(0 \in \varphi^{-1}(X_1), 1 \in \varphi^{-1}(X_2))$

ואז קיבלנו פירוק של $[0,1]$ בסתירה לכך ש - $[0,1] \in Conn$.

☺

טענה: $[0,1] \in Conn$.

הוכחה: נניח בשלילה שיש פירוק טופולוגי $[0,1] = X_1 \cup X_2$. בה"כ $0 \in X_1, 1 \in X_2$.

X_1 פתוחה ב $[0,1]$. לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $[0,0+\varepsilon) \subset X_1$.

נסמן $A := \{x \in [0,1] : [0,x) \subset X_1\}$, $c := \sup A$.

אז $[0,0+\varepsilon) \subset A$, $0 < c$.

נוכיח ש $c \in A$.

צ"ל $[0,c) \subset X_1$.

אכן, לכל $x \in [0,c)$ (לפי הגדרת $c := \sup A$) קיים $\exists y \in A \;\; x < y < c$.

ז"א $[0,y) \subset A$

קבוצה X_1 סגורה ב $[0,1]$. לכן $c \in cl[0,c) \subset cl(X_1) = X_1$.

מצד שני X_1 פתוחה ב $[0,1]$. לכן עבור נקודה c קיים $\varepsilon > 0$ כך ש
$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap [0,1] = (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset X_1$ (קחו בחשבון ש $0 < c$)

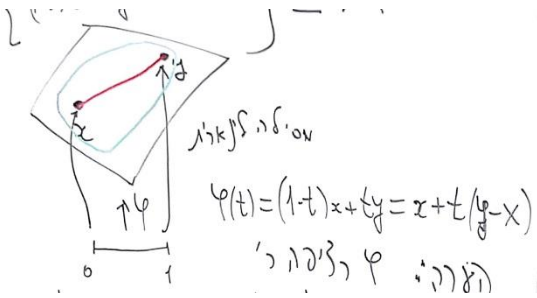
בפרט $[c,c+\varepsilon)\subset X_1$.

נקבל $[0,c)\cup[c,c+\varepsilon)=[0,c+\varepsilon)\subset X_1$.

מכאן $c+\varepsilon\in A$. אבל אז מתקבלת סתירה עם הגדרת $c:=\sup A$.

מש"ל

הגדרה: תת קבוצה X במ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x,y\in X$ מתקיים $\{(1-t)x+ty: 0\le t\le 1\}\subseteq X$ (מסילה לינארית) נסמן $X\in Conv$.



הערה:

φ רציפה כי $\varphi\in Lip_{\|y-x\|}$.

דוגמה: כל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ וכדורים בתוכו (פתוחים, סגורים) קבוצות קמורות ב E.

טענה: $\boxed{Conv\subsetneq PConn\subsetneq Conn}$

הרצאה 7

הגדרה: $\mathbb{R}\supseteq X\neq\varnothing$ **קטע** אם לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$.

<u>טענה</u>: נניח $X\subset\mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) X "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

2) $X\in Conv$

3) $X\in PConn$

4) $X\in Conn$

הסבר: $(1) \Leftarrow (2)$: לכל $a,\mathrm{b} \in X$ מתקיים $[a,\mathrm{b}] \subseteq X$. מצד שני $[a,\mathrm{b}] = \{a+(b-a)t \mid 0 \le t \le 1\}$.

$(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$ נובע מהכלות ברורות $Conv \subseteq PConn \subseteq Conn$.

$(1) \Rightarrow (4)$ אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a,\mathrm{b} \in X$ כך ש $[a,\mathrm{b}] \not\subset X$.

ז"א קיימים: $a < c < b$ כך ש $a, b \in X$ אבל $c \notin X$.

נגדיר $X_1 \coloneqq (-\infty, c) \cap X, X_2 \coloneqq (c, \infty) \cap X$

ואז נקבל ש $X = \underbrace{X_1}_{a\in} \sqcup \underbrace{X_2}_{b\in}$ פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש $X \notin Conn$ בסתירה!

☺

<u>**משפט**</u> **(ערך הביניים):** נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Conn$.

2) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ממשית יש תכונת ערך ביניים.

<u>**הוכחה:**</u> $(1) \Leftarrow (2)$: תמונה רציפה שומרת על $Conn$. לכן $Conn \ni f(X) \subset \mathbb{R}$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש - $f(X) \in \{\text{קטעים}\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

$(2) \Leftarrow (1)$: נניח בשלילה שלא. אז $X \notin Conn$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X = X_1 \sqcup X_2$

נגדיר פונקציה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, אשר שולחת את X_1 ל 0 ואת X_2 שולחת ל 1.

X_1, X_2 פתוחות ב X ⇐ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז f רציפה. אבל נקבל ש $f(X) = \{0,1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!

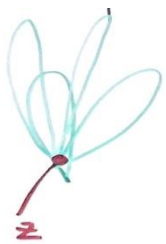
☺

<u>**משפט**</u> **(האלומות – תנאי מספיק לקשירות):** נניח X מ"ט, $X = \bigcup_{j\in J} Y_j$ כך ש:

1) $\forall j \in J: Y_j \in Conn$

2) $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq \emptyset$

אזי $X \in Conn$.



הוכחה: מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z \in \bigcap_{j\in J} Y_j$.

נניח בשלילה ש – X פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1, X_2 כך ש –

$$X = X_1 \sqcup X_2$$

בה"כ $z \in X_1$ (ואז $z \notin X_2$).

מתקיים $\forall j \in J: Y_j = \left(Y_j \cap X_1\right) \sqcup \left(Y_j \cap X_2\right)$

כעת נשים לב ש $Y_j \cap X_1$ ו $Y_j \cap X_2$ פתוחות וזרות בתת מרחב Y_j ו$z \in Y_j \cap X_1$.

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל j, אחרת היינו מקבלים ש $Y_j \notin Conn$ (פריק).

כעת $X_2 = \bigcup_{j \in J}\left(X_2 \cap Y_j\right) = \emptyset$ בסתירה לפירוק של X.

☺

תוצאות:

1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. אזי $X \in Conn$

2) **שרשור**

נניח $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$

אזי $X \in Conn$.

הסבר: 1) מיידי מהמשפט!

2) נובע מ (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$\forall k \in \mathbb{N}: A_k \coloneqq Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \in Conn$

נשים לב $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$

וברור $A_1 \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in Conn$.

☺

הגדרה: (מרכיבי קשירות): במ"ט X נגדיר את היחס הבא

$x \equiv y \overset{def}{=}$ אם "אפשר לחבר x ל y ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת

$Conn \ni A_{x,y} \subset X$

כך ש $\{x, y\} \subset A$

טענה: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

הסבר:

1) $x \equiv x$ הסבר: $A_{x,x} = \{x\}$.

2) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$, הסבר: $A_{y,x} \coloneqq A_{x,y}$.

3) צ"ל $\begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \Leftarrow x \equiv z$ הסבר: $A_{x,z} \coloneqq A_{x,y} \cup A_{y,z}$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש - $A_{x,z} \in Conn$.

__הגדרה__: מרכיב קשירות של נק x ב X הוא $[x] \coloneqq \{y \in X | x \equiv y\}$ "מחלקה של x".

כאשר $x \equiv y \Leftrightarrow \exists A_{x,y} \in Conn, \{x,y\} \subseteq A_{x,y} \subseteq X$

תכונות מרכיבי קשירות:

- $X = \bigcup_{x \in X}[x]$ (יש חזרות! $[x] = [y] \Leftrightarrow x \equiv y$).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.
- X קשיר $\Leftrightarrow$ יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \bigcup\{A \subseteq X | x \in A, A \in Conn\}$

ז"א $[x]=$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את x.

- $[x]$ סגור ב X.

רמז: תוכיחו קודם את הטענה הבאה (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

__טענה__: (תרגול) נניח $X = \bar{Y}$ (ז"א Y צפופה ב X). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

דוגמה: תארו מרכיבי קשירות של:

א. $X = (0,2) \cup (2,5) \cup \{7\}$

תשובה: $[1] = (0,2), [3] = (2,5), [7] = \{7\}$

ב. $X = \{1,2,3,4\} \times \mathbb{R}$

תשובה: $\{1\} \times \mathbb{R}, \{2\} \times \mathbb{R}, \{3\} \times \mathbb{R}, \{4\} \times \mathbb{R}$.

הגדרה: מ"ט X נקרא **"לא קשיר לחלוטין"** $(totally\ disconnected)$ אם

$[x] = \{x\}$ לכל $x \in X$ (**רק** נקודון תת קבוצה קשירה).

הערה: במקרה מנוון של מרחב נקודון מתקבל מרחב מוזר שהוא גם קשיר וגם לא קשיר לחלוטין.

דוגמאות:

1) מרחבים דיסקרטיים.

2) $\mathbb{Q}$

3) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

4) * $(\mathbb{Z},d_p)$

(רמז: לכל $a\in(\mathbb{Z},d_p)$ ו $b\neq a$ קיימת סביבה סגוחה $U\in N(a)$ כך ש $b\notin U$)

<u>**הגדרה:**</u> **(מרכיב קשירות מסילתי):** לכל מ"ט X ונקודה $x\in X$ מרכיב קשירות $[\mathrm{x}]_p$

של x מוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס שקילות הבא:

$$x\equiv_P y \overset{def}{=} \text{קיימת ב}X\text{מסילה מ } x \text{ ל } y$$

טענה: $\equiv_P$ יחס שקילות.

הסבר:

1) $x\equiv_P x$. ניקח מסילה קבועה.

2) $y\equiv_P x \Leftarrow x\equiv_P y$. עבור מסילה $f:[0,1]\to X$

נגדיר "מסילה הפוכה" $f^*(t)=f(1-t)$ $\quad f^*:[0,1]\to X$

3) $x\equiv_P z \Leftarrow \begin{cases} x\equiv_P y \\ y\equiv_P z\end{cases}$

עבור $\begin{cases} f_1(0)=x, f_1(1)=y \\ f_2(0)=y, f_2(1)=z\end{cases}$ נגדיר $f_3:[0,1]\to X$ כך ש $f_3(t)=\begin{cases} f_1(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$

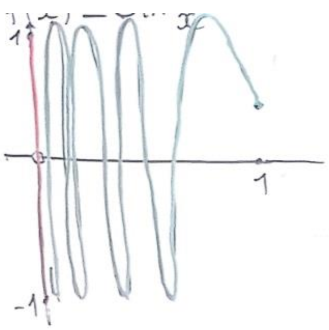
$$f_3(0)=x, f_3(1)=z$$

ונקבל ש f_3 רציפה מהתרגיל הבא (שהיה בתרגול):

תרגיל: נניח $X=Y_1\cup Y_2$, Y_1,Y_2 סגורות.

נתונה פונקציה $X\xrightarrow{f} Z$ כך ש הצמצומים $f\,|_{Y_1}:Y_1\to Z$, $f\,|_{Y_2}:Y_2\to Z$ רציפות.

אז f רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).



<u>**הערה:**</u> $PConn\neq Conn$

נגדיר פונקציה $[-1,1]\xleftarrow{f}(0,1]$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

נגדיר $X\coloneqq(\{0\}\times[-1,1])\cup Gr(f)$ "Sine curve"

$$(0,1]\simeq Gr(f)\coloneqq\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\in\mathbb{R}^2 \middle| 0<x\le 1\right\}$$

כעת, $Gr(f) \simeq (0,1]$ קשיר ו $Gr(f)$ צפוף ב X (כלומר $\overline{Gr(f)} = X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X \in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן X לא קשיר מסילתית, כלומר $X \notin PConn$.

<u>תרגיל</u>: **(לעתיד)** לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש

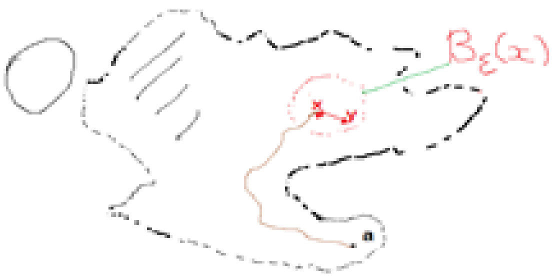
$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y}_{\text{תת מרחב טופלוגי}}$.

בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

<u>משפט</u>: כל קבוצה <u>קשירה ופתוחה</u> O במרחב <u>נורמי</u> E היא קשירה מסילתית.

<u>הוכחה</u>: נבחר $a \in O$ ונסמן $a \in A := [a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של a במרחב O.
אז A פתוחה ב O. כי אם $x \in A$ אז $B_\varepsilon(x) \subseteq O$ עבור ε מספיק קטן. $B_\varepsilon(x)$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב $B_\varepsilon(x)$ מ x לכל $y \in B_\varepsilon(x)$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב O מנקודה a ל y (טרנזיטיביות). לכן $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O \setminus A$ פתוח ב O. אבל אז $O \setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש O פריק. לכן $O = A = [a]_p$ ואז O קשיר מסילתית (מרכיב 1).



<u>הגדרה</u>: X נקרא **קשיר מקומית** בנקודה $a \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(a)$ קיימת סביבה $U \supseteq V \in N(a)$ כך ש V קשיר. אומרים: *קשיר מקומית* אם זה מתקיים בכל נקודה.

<u>תרגיל</u>:

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. * תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

הומיאומורפיזמים המשך:

- $[3,8] \not\approx [0,1] \cup [3,6]$

כי הראשון קשיר והשני לא קשיר.

<u>הגדרה</u>: נקודה $a \in X$ במ"ט X נקראת **<u>מחלקת</u>** אם: X קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ לא קשיר.

למשל: בעקומה הבאה נקודות אדומות הן נקודות מחלקות

הגדרה: אם: X קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ עם n מרכיבי קשירות אז אפשר להגדיר *נקודה מחלקת עם דרגה n*.

הערה: הומיאומורפיזם מעביר נקודה מחלקת (עם דרגה n) לנקודה מחלקת (מדרגה n).
אם $X \xrightarrow{f} Y$ אז צמצום מלא

$\underbrace{X/\{p\}}_{\substack{\text{פריק} \\ \text{ז"א לא קשיר}}} \xrightarrow{f_*} \underbrace{Y/\{f(p)\}}_{\text{שגם פריק}}$ גם הומיאומורפיזם.

הסבר: שימוש (פעמיים) בתורשתיות של הרציפות.

- $[0,1) \not\approx (2,5)$ $\quad$ $(0,1) \not\approx [2,3]$

ב - $(2,5)$ כל נקודה היא "נקודה מחלקת" ($(2,5)/\{c\} \notin Conn$). אבל ב - $[0,1)$ יש נק' שלא מחלקת, זאת נק' 0. $\quad [0,1)/\{0\} \in Conn$

תכונה חשובה: הומיאומורפיזם שומר על נקודות מחלקות.

כנ"ל: מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות. כנ"ל מספר *מרכיבי קשירות* .

- הוכיחו ש - $0 \not\approx 8$ (שניהם קומפקטיים, קשירים...)
- הוכיחו ש 8 לא הומיאומורפי עם "העקומה" +
- למיין עד כדי הומיאומורפיזמים:

א) את כל "הספרות"

1234567890

ב) האלף-בית האנגלי

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(עבור sans serif font "ללא קישוטים, ללא עובי" אותיות וגם הספרות)

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שכל הכדורים ב $(\mathbb{Z}, d_p)$ הם הומיאומורפיים.

הערה: כל פונקציה לינארית בין מרחבים אוקלידיים

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} A_f \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

היא רציפה (ליפשיץ – $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$), כאשר A_f מטריצה של f

$$\Downarrow$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית הפיכה $(\det(A_f) \neq 0)$. אזי f הומיאומורפיזם.

הרצאה 8

<u>הגדרה</u>: (**אוטומורפיזמים**)

- ***חבורת הומיאומורפיזמים*** של מ"ט

$X \in TOP$, $Homeo(X) := \{X \xrightarrow{f} X \text{ הומיאומורפיזמים}\}$ חבורה לגבי ההרכבה

- ***חבורת איזומטריות*** של מ"מ

$X = (X,d) \in Metr$, $Iso(X) := \{(X,d) \to (X,d) \text{ איזומטריות}\}$

שימו לב: אם $\tau = top(d)$ אז $\mathrm{Iso}(X,d)$ תת חבורה של $\mathrm{Homeo}(X,\tau)$.

$$Iso(X) \le Homeo(X) \underbrace{\le}_{\text{ת"ח}} \underbrace{(S_X,\circ)}_{\text{חבורה סימטרית}}$$

<u>הגדרה:</u> נגדיר פעולה טבעית $Homeo(X) \times X \to X \quad (f,x) \longmapsto f(x)$

מחלקות שקילות $[x]=\{f(x) \in X \mid f \in Homeo(X)\}$ אורביטה (מסלול) של x.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש X הוא **מ"ט הומוגני** ($homogeneous$) אם יש רק מסלול 1.

שקול: $\forall\, x,y \in X\,, \exists f \in Homeo(X): f(x)=y$

זאת תכונה טופולוגית. זאת אומרת נשמרת ע"י הומיואומורפיזמים.

<u>דוגמה:</u> כל מ"ט דיסקרטי הוא הומוגני. כאן $Homeo(X,\tau_{discr})=S_X$?

<u>דוגמה:</u> $X=(0,2)$ מ"ט הומוגני.

אחד מההסברים: $(0,2)\simeq\mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}$ הומוגני.

<u>דוגמה:</u> אם $X=[0,1)\cup\{3\}$. אז לא הומוגני. יש 3 מסלולים הבאים:

$$[3]=\{3\},\quad [0]=\{0\},\quad [\tfrac{1}{2}]=(0,1)$$

<u>הגדרה:</u> באופן דומה מגדירים מ"מ (X,d) הומוגני

(אם לפעולה $Iso(X)\times X \to X$ יש מסלול אחד).

<u>דוגמה:</u> $\mathbb{R}^n$, מרחב נורמי, S_n, $(\mathbb{Z},d_p)$ מ"מ הומוגניים (לכן גם הומוגני כמ"ט).

דוגמה: $X=(-1,1)$ אז הוא הומוגני כמרחב טופולוגי אבל לא כמ"מ

(שימו לב: כאן $Iso(X)$ בעל שני איברים בלבד: פונקצית זהות ושיקוף).

<u>תרגיל:</u> כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

א) $X=(3,\infty)$

ב) $X=[0,1]$

ג) $X=8$

ד) $X=(0,1)\cup(2,4)\cup\{7\}$.

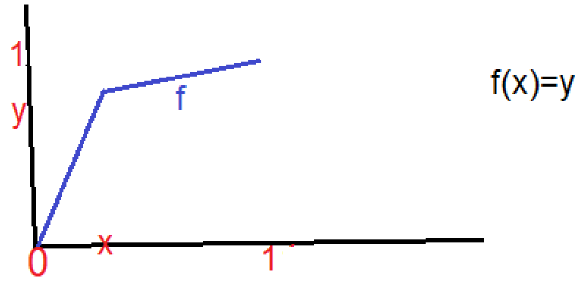
תשובה:

א) מסלול 1 (הומוגניות!). $\mathbb{R}\simeq(3,\infty)$ ו - $\mathbb{R}$ הומוגני (הזזות).

ב) 2 מסלולים. $[0]=\{0,1\}=[1]$ $\left[\frac{1}{2}\right]=\{x|0<x<1\}$

רמז: לא קיים $h\in Homeo([0,1])$ כך ש $0<x<1$, $h(0)=x$.

כי x נק' מחלקת עבור $[0,1]$ ו- 0 לא.



$\forall 0<x<y<1 \quad \exists f\in Homeo([0,1]) \quad f(x)=y$

שיקוף $\exists f\in Homeo([0,1]) \quad f(0)=1$

ג) 2 מסלולים. מדוע ?

ד) 2 מסלולים. מדוע ?

בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח $\gamma\subseteq P(X)$ (אוסף תת קבוצות ב X). נגדיר:

- $\gamma^{\cup}:=\{\cup\{B:B\in\beta\}\,|\,\beta\subseteq\gamma\}$ (כל מיני איחודים דרך איברים של γ)
- $\gamma^{\cap F}:=\{\cap\{B:B\in\beta\}\,|\,\beta\subseteq\gamma,\beta \text{ is finite}\}$ (חיתוכים סופיים דרך איברים של γ)

תמיד: $\gamma\subseteq\gamma^{\cap F}$ $\gamma\subseteq\gamma^{\cup}$ $\varnothing\in\gamma^{\cup}$ $\varnothing\in\gamma^{\cap F}$ (ניקח β קבוצה ריקה)

למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:

(t_1) $\varnothing,X\in\tau$ (t_2) $\tau^{\cap F}=\tau$ (t_3) $\tau^{\cup}=\tau$.

<u>הגדרה:</u> (בסיס *basis*) יהי (X,τ) מ"ט. $\gamma\subseteq\tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ γ.

<u>הערה:</u> (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה τ.
2. $\gamma^{\cup}=\tau$.
3. $\gamma\subseteq\tau$ ולכל $O\in\tau$ ולכל $a\in O$ קיים $G_a\in\gamma$ כך ש $a\in G_a\subseteq O$.

הגדרה: נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha\subseteq\tau$ נקרא Pre-base פרה-בסיס

(אומרים גם תת-בסיס subbase)

אם $\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל τ

שקול: $(\alpha^{\cap F})^{\cup}=\tau$

הגדרה: אומרים ש - (X,τ) **בעל תכונת מנייה שנייה** $(second\ countable)$ ונסמן:

$$(X,\tau)\in B_2$$

אם קיים **בסיס** γ **בן מנייה.**

דוגמאות של בסיס טופולוגי: (תשתמשו בהגדרה (3))

- ב $X=\mathbb{R}$ $\gamma_1=\{(a,b)\mid a<b\}$ וגם $\gamma_2=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ בסיסים.
  $\gamma_3=\{(a,\infty),(-\infty,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ **פרה-בסיס** אבל לא בסיס.
- ב $X=\mathbb{R}^2$
  א. γ_0={עיגולים פתוחים}
  ב. $\gamma_1=\{(a,b)\times(\mathrm{c,d})\}$={"מלבנים" פתוחים}
  ג. γ_2={ריבועים פתוחים} γ_3={משולשים פתוחים}
  ד. γ_4={עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"}
  ה. γ_5={משולשים פתוחים שווה צלעות}
- $\mathbb{R}^n\in B_2$

{כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים $\gamma_4=\{\frac{1}{k}$ בן מניה !

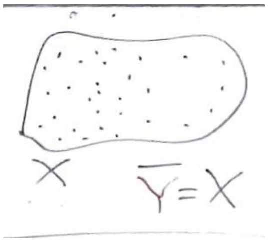
- ב $(\mathbb{R},\tau_s)$ (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה $\mathbb{R}$ מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s:=\{O\subseteq\mathbb{R}:x\in O\Rightarrow\exists\varepsilon>0\,[x,x+\varepsilon)\subseteq O\}$$

אז $\gamma=\{[a,b)\mid a<b\}$ בסיס. תבדקו שכל $[a,b)$ היא קבוצה **סגורה** ב $(\mathbb{R},\tau_s)$.

- לכל (X,d) "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגייה $top(d)$.
  א. $\gamma:=\{B_r(a)\}_{\substack{a\in X\\ r>0}}$ $\gamma^{\cup}=top(d)$ (ראו משפט: "כדורים בסיס").
  ב. גם $\gamma_1:=\left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in X\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס.

טענה: (תרגול) לכל (X,d) ולכל $\bar{Y}=X$ (כלומר Y צפוף בX) $\gamma_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in Y\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס ל $top(d)$.



תוצאה חשובה: אם מרחב מטרי (X,d) הוא ספרבילי אז הוא גם B_2.

$$(X,d)\in B_2 \Leftarrow (X,d)\in Sep$$

טענה: הוכיחו ש B_2 תכונה תורשתית.

רמז: תבדקו שאם γ בסיס ל (X,τ) ו $Z\subseteq X$ תת קבוצה אז $\gamma_Z := \{G\cap Z \mid G\in\gamma\}$ בסיס לתת מרחב (Z,τ_Z).

טענה: לכל מרחב דיסקרטי (X,τ_{discr}) אוסף כל הנקודונים $\gamma_0 = \{\{x\}\mid x\in X\}$ הוא בסיס ל (X,τ_{discr}). לכל בסיס אחר γ מתקיים $\gamma_0\subseteq\gamma$.

הסיקו: $(X,\tau_{discr})\in B_2 \Leftrightarrow |X|\leq\aleph_0$.

למשל: $(\mathbb{R},\tau_{discr})\notin B_2$.

משפט: $B_2\subset Sep$.

הוכחה: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ $\gamma \not\ni \varnothing$. לכל $G\in\gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G\in G$. נגדיר $Y_\gamma := \{y_G \mid G\in\gamma\}$ אז Y_γ בת מניה (כי γ ב"מ) ו Y_γ צפופה ב X . אכן נוכיח $cl(Y_\gamma)=X$.

לכל $O\in\tau$ ולכל $a\in O$ קיים $G_a\in\gamma$ כך ש $a\in G_a\subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_G\in G_a$

לכן $y_G\in Y_\gamma\cap O\neq\varnothing$.

זה מוכיח שכל נקודה $a\in X$ שייכת לסגור של Y_γ. ז"א $cl(Y_\gamma)=X$.

☺

<u>תוצאה 1</u>: $\boxed{B_2 \cap Metriz = Sep \cap Metriz}$..

<u>תוצאה 2</u>: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

הסבר: כי B_2 תורשתית ...

<u>טענה</u>: $l_\infty \notin Sep$ (קיים מרחב בנך לא ספרבילי).

הסבר: $(l_\infty, d_{sup}) \underset{\text{תת מרחב מטרי}}{\hookleftarrow} \underbrace{(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d_\Delta)}_{\text{סדרות בינאריות}}$ לא ספרבילי

(מרחב דיסקרטי ספרבילי אם"ם הוא בן מניה)

<u>הערה</u> 1: $B_2 \neq Sep$.

קו סורגנפרי מקיים: $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep \quad (\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2,$.

<u>הערה</u> 2: ספרביליות לא תורשתית (גם בבמרחבים יחסית טובים).

למשל: * "מישור סורגנפרי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי (נלמד).

<u>טענה</u>: נניח X קבוצה ו γ אוסף תת קבוצות ב X. התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה מסוימת.
2. א. $X \in \gamma^{\cup}$

   ב. חיתוך של 2 קבוצות מ γ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ γ.

<u>הערה</u>: ב שקול ל ב*: $\forall A, B \in \gamma \ \forall x \in A \cap B \ \exists C \in \gamma \quad x \in C \subseteq A \cap B$

ב* שקול ל ב**: $\gamma^{\cap_F} \subseteq \gamma^{\cup}$.

<u>**הוכחה**</u>: נגדיר אוסף $\tau := \gamma^{\cup}$. מ"ל τ טופולוגיה.

$$(t_1) \quad \varnothing, X \in \tau$$

הסבר: $X \in \tau$. בגלל תנאי א. תנאי $\varnothing \in \tau$ נובע מהתכונה הנ"ל על $\gamma^{\cup}$.

$$(t_2) \quad \tau^{\cap_F} = \tau$$

הסבר: $\tau^{\cap_F} = (\gamma^{\cup})^{\cap_F} = (\gamma^{\cap_F})^{\cup} \subseteq (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

$(t_3) \quad \tau^{\cup} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

☺

הערה: מקרה פרטי חשוב לתנאי ב בטענה הוא "סגירות לגבי חיתוכים סופיים" ($\gamma^{\cap_F} = \gamma$)

נשתמש בנושא של מכפלות טופולוגיות.

דוגמה: $\gamma := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$

$$[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) = [a_3,b_3) \quad a_3 := \max\{a_1,a_2\},\, b_3 := \min\{b_1,b_2\}$$

לכן $\gamma^{\cap_F} = \gamma$.

בסיס מקומי

הגדרה: $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a, אם לכל $U \in N(a)$ קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

הגדרה: אומרים ש- (X,τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X,\tau) \in B_1$ אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

דוגמה: לכל (X,d) דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה a

$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$ $\quad \beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ בן מנייה ! $\quad \beta_3 := \{B[a,\frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$

תוצאה: $Metriz \subset B_1$

דוגמה: $(X,\tau_{discr}) \in \mathrm{B}_1$.

הסבר נוסף : לכל $a \in (X,\tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

ערה:

- מספיק לבדוק רציפות פונקציה דרך בסיס.
- מספיק לבדוק רציפות בנקודה עבור סביבות מבסיס מקומי.

* מספיק לבדוק התכנסות סדרות עבור סביבות מבסיס מקומי

תרגיל: B_1 תכונה תורשתית.

טענה: $B_2 \subset B_1$

הסבר: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). לכל $a \in X$ נגדיר $\gamma_a := \{A \in \gamma \mid a \in A\}$.

אז γ_a בסיס מקומי בנקודה a.

דוגמה: $B_2 \neq B_1$ $\begin{cases}(\mathbb{R}, \tau_{discr}) \in B_1 \\ (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \notin B_2\end{cases}$

הערה: $Discrete \subset Metriz \subset B_1$

$Metriz \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$

הגדרה: $\mathbf{dim(X) = 0} \overset{def}{=}$ קיים בסיס γ לטופולוגיה כך שכל $A \in \gamma$ קבוצה סגוחה .

הגדרה כללית: ***Menger–Urysohn*** (ראו גם עבודת סמינר לסטודנטים)

עבור מרחבים עם $X \in T_3$ מגדירים:

* $\dim(\varnothing) = -1$
* $\dim X \le 1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) \le 0 \quad \forall A \in \gamma$.
* $\dim X \le n+1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) \le n \quad \forall A \in \gamma$.

הערה: מסמנים יותר ב $ind\, X$ (*inductive dimension*).

דוגמאות: $\dim \mathbb{R}^n = \dim S_n = n$ ....

משפט: אם $X \in T_1$ וגם $\dim(X) = 0$ אז - $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הוכחה: נניח $a \in X, a \notin B, cl(B) = B$.

על מנת לבדוק $X \in T_{3.5}$ צ"ל קיימת הפרדה פונקציונלית של a ו B.

$a \in B^c \in \tau$. לכן לפי הגדרת מימד אפס (ושל בסיס) קיימת קבוצה סגוחה O כך ש $a \in O \subseteq B^c$

$O \subset X$ קב' סגוחה אזי $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}$

רציפה! (4 מקרים .... ראינו הוכחה דומה).

ברור שהפונקציה מפרידה a ו B.

☺

<u>טענה</u>: אם $\dim X = 0, X \in T_1$ אז X בלתי קשיר לחלוטין.

<u>הוכחה:</u> תשתמשו ברעיון של המשפט הקודם. לכל תת קבוצה $A \subseteq X$ ששונה מנקודון קיימת פונקציה רציפה $f: A \to \{0,1\}$ **על**. לכן A לא קשירה.

☺

<u>דוגמאות:</u>

א. $\dim(X, \tau_{discr}) = 0$

τ_{discr} בסיס לעצמו ומוכב מקבוצות סגוחות.

ב. $\dim(\mathbb{Q}) = 0$.

$\gamma := \{(a,b) \cap \mathbb{Q} | a, b \in \mathbb{Q}^c\}$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

ג. $\dim(\mathbb{Z}, d_p) = 0$.

כל כדור הוא סגוח ב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (בעצם גם בכל מרחב אולטרהמטרי)

ד. $\dim(\mathbb{R}, \tau_S) = 0$ Sorgenfrey line

תזכורת: $O \in \tau_S \overset{def}{=} x \in O \Rightarrow \exists\, \epsilon = \epsilon_x > 0 : [x, x+\epsilon_x) \subset O$.

<u>תכונות קו סורגנפריי:</u> $(\mathbb{R}, \tau_s)$ $\tau_s := \{O \subseteq \mathbb{R} : x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\, [x, x+\varepsilon) \subseteq O\}$

- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_2$

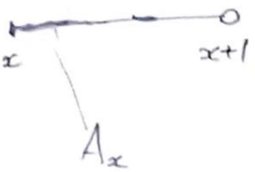
$\gamma := \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ בסיס ($\gamma^{\cup} = \tau_s$) $O = \bigcup_{x \in O} [x, x+\epsilon_x)$.

- א. $\tau \neq \tau_s$ ב. $\tau \subset \tau_s$.

$(a,b) = \cup\{[x, x+\varepsilon_x) \mid x \in (a,b)\} \in \tau_s$

- $(\mathbb{R},\tau_s)\in B_1$ $\{[a,a+\frac{1}{n}):n\in\mathbb{N}\}\subset N_{\tau_s}(a)$ בסיס מקומיבן מניה
- $(\mathbb{R},\tau_s)\in Sep$ $cl_{\tau_s}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$
- **טענה**: $(\mathbb{R},\tau_s)\notin B_2$

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקיים בסיס $\gamma\subset\tau_s$ כך ש γ בן מנייה.



$[x,x+1)\in\tau_s$ פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס γ.

אז קיים $A_x\in\gamma$ כך ש - $x\in A_x\subset[x,x+1)$.

נבחר A_x כזה ונגדיר העתקה $\mathbb{R}\xrightarrow{\varphi}\gamma$ $x\longmapsto A_x$

φ חח"ע ($x\neq y\Rightarrow A_x\neq A_y$).

$$2^{\aleph_0}=\aleph=|\mathbb{R}|=|\varphi(\mathbb{R})|\le|\gamma|$$

מכאן $\aleph_0<2^{\aleph_0}\le|\gamma|$, לכן γ לא בת מנייה!

- $(\mathbb{R},\tau_s)\notin Metriz$ (כי הוא ספרבילי ללא B_2)
- $\dim(\mathbb{R},\tau_s)=0$. בסיס γ מורכב מקבוצות סגוחות. $\Leftarrow$
- $(\mathbb{R},\tau_s)\in T_{3\frac{1}{2}}$ (נובע מהתכונה הקודמת והמשפט שהוכחנן).

קשר בין עקרון *Heine* ותכונת B_1

<u>הגדרה:</u> אומרים שמ"ט X הוא בעל **תכונת FU** $(Frechet-Urysohn)$ אם:

$$\forall A\subseteq X:\ \ scl(A)=cl(A)$$

<u>הערה:</u> $Metriz\subset B_1\subset FU$

<u>הערה:</u> למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא *FU*.

<u>טענה:</u> $B_1\subseteq FU$.

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם $X\in B_1$ אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה

$\alpha=\{U_n:n\in\mathbb{N}\}$ <u>מונוטוני</u> (ז"א $U_{n+1}\subseteq U_n$). אפשר "לתקן כל בסיב מקומי בן מנייה (חיתוכים סופיים רקורסיסית) לקבלת בסיס מקומי מונוטוני.

ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ ...

הרצאה 9

<u>**משפט**</u> **(עיקרון *Heine* מתוקן):** נניח $(Y,\sigma)\xrightarrow{f}(X,\tau)$ פו' בין מ"ט. נניח ש - $(X,\tau)\in FU$ (למשל: $(X,\tau)\in B_1$) אין הגבלה על Y. אז התנאים הבאים שקולים:

(1) f רציפה.
(2) f שומרת על התכנסות (ז"א $f(scl(A))\subseteq scl(f(A))$).

<u>**הוכחה:**</u> $(1)\Leftarrow(2)$: תמיד (ממשפט $\frac{1}{2}$ *Heine*).

$(2)\Leftarrow(1)$:

$$f\big(cl(A)\big)\underbrace{=}_{X\in FU}f\big(scl(A)\big)\underbrace{\subseteq}_{\text{נתון}}scl\big(f(A)\big)\underbrace{\subseteq}_{\text{תמיד מתקיים}}cl\big(f(A)\big)$$

☺

<u>**תוצאה:**</u> עיקרון *Heine* נכון עבור קו *Sorgenfrey* $(\mathbb{R},\tau_s)\xrightarrow{f}(Y,\sigma)$ (כתחום הפונקציה) כי $(\mathbb{R},\tau_s)\in B_1\subset FU$.

<u>**הערה:**</u> בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

$(M,\preccurlyeq)$ קבוצה <u>סדורה חלקית</u> **מכוונת** (לכל $\forall a,b\in M\ \exists c\in M\ a\le c,b\le c$).

סדרה מוכללת או רשת (generalized sequence or net) היא פונקציה $(M,\preccurlyeq)\xrightarrow{f}X$ (סדרה רגילה: $(\mathbb{N},\le)\xrightarrow{f}X$).

<u>דוגמה חשובה</u>: כל בסיס מקומי β (לנקודה a) דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

אם לכל $V\in\beta$ נבחר באיבר $x_V\in V$ אז נקבל $\lim\{x_V:V\in\beta\}=a$.

דרך רשתות אפשר לתת תיאור של $cl(A)$.

$z\in cl(A)\Leftrightarrow z$ גבול של סדרה מוכללת

ואז יש הכללת עיקרון *Heine* ...

<u>שימו לב</u>: למשל **אינטגרלים** זה סוג של גבול (אבל לא גבול רגיל !)

דרך סדרות מוכללות מסוימות.

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.

תזכורת:

הגדרה: נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא פרה-בסיס (אומרים גם תת-בסיס) אם

$\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל τ שקול: $(\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau$

דוגמאות:

1) כל בסיס הוא פרה-בסיס.

2) א) $X = \mathbb{R}$ $\alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty)\}$. $a, b \in \mathbb{R}$ (או $a, b \in \mathbb{Q}$).

α פרה– בסיס אבל לא בסיס! $\underbrace{\gamma = \{(a,b)\}}_{\text{בסיס ל-}\mathbb{R}} \subset \alpha^{\cap_2} \subset \alpha^{\cap F}$

הגדרה: לכל קבוצה **סדורה ליניארית** $(X,\leq)$ אפשר להגדיר

"interval topology" $\tau_{\leq}$

עם פרה-בסיס $\alpha := \{(-\infty,b), (a,\infty) \mid a,b \in X\}$ $\tau_{\leq} = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$

ב) $X = \mathbb{R}^2$. $\alpha = \{(a,b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (c,d)\}$

כאשר $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ (או $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$) הוא פרא-בסיס.

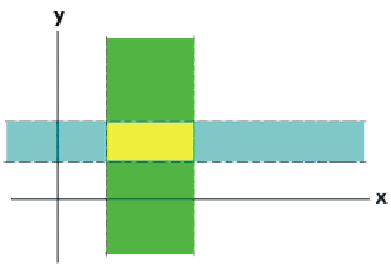


Fig. 2

טענה: נניח $X, Y \in TOP$ ונתונה פונקציה $f: X \to Y$.

$\alpha \subset \tau_Y$ פרה-בסיס. אז התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה.
2. $\forall U \in \alpha: f^{-1}(U) \in \tau_X$.

הסבר:

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u> בגלל קריטריון 2 של הרציפות.

<u>$(2) \Leftarrow (1)$:</u> צ"ל $\forall O \in \tau_Y: f^{-1}(O) \in \tau_X$.

מצד שני, α תת בסיס ל τ_Y, לכן $O \in \tau_Y = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$

$f^{-1}(O) \in \tau_X$ כי ה"מקור" שומר על $\cap_F$ וגם על $\cup$.

■

<u>תוצאה</u>: התנאים הבאים שקולים :

1. $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה.
2. $f^{-1}(a,\infty), f^{-1}(-\infty,b)$ פתוחות לכל $a,b \in \mathbb{Q}$ (או $a,b \in \mathbb{R}$).

<u>הסבר</u>: דוגמה 2א + הטענה.

■

<u>טענה</u>: נניח $\alpha \subset P(X)$ כך ש α כיסוי ל X. אז α הוא פרא-בסיס לטופולוגיה $\tau := (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$.

<u>הסבר</u>:

(t_1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \alpha^{\cup}$ (כי נתון ש – α כיסוי).

(t_2) $\tau^{\cap_F} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cap_F} = ((\alpha^{\cup})^{\cap_F})^{\cap_F} = (\alpha^{\cup})^{\cap_F} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau$

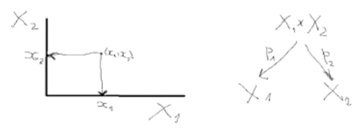
(t_3) $\tau^{\cup} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cup} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau$.

■

<u>מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)</u>

(X_1,τ_1), (X_2,τ_2) מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \prod_{i\in\{1,2\}} X_i \qquad (X_1 \times X_2, \tau_{\Pi} = ?)$$



כללי יותר: $\tau_{\Pi} = ?$ על $X = X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i \in X_i\} = \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i$

<u>רעיון:</u> מגדירים <u>טופולוגית מכפלה</u> כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של **<u>הטלות</u>**

$$p_k : \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i \to X_k \qquad p_k(x_1,\cdots,x_n) = x_k$$

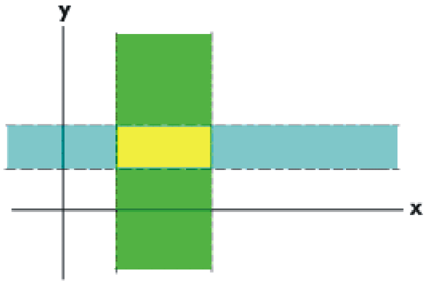


Fig. 2

$$\{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2|x_1\in O_1\}=p_1^{-1}(O_1)=O_1\times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2)=X_1\times O_2$$

$$(O_1\times X_2)\cap(X_1\times O_2)=p_1^{-1}(O_1)\cap p_2^{-1}(O_2)=\underbrace{O_1\times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

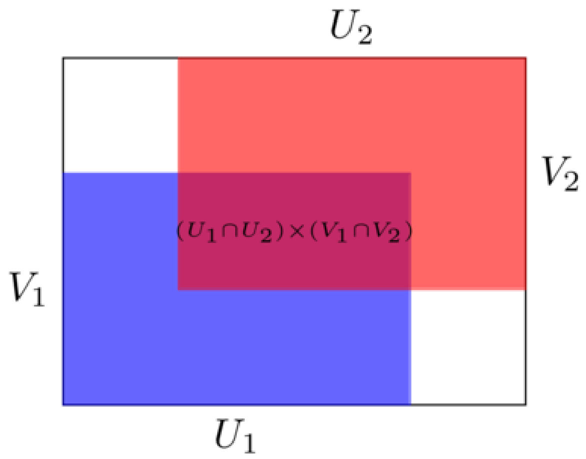
$O_1\times X_2$, $X_1\times O_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה τ_π על $X_1\times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) $O_1\times O_2\in\tau_\pi$.

<u>הגדרה:</u> $\gamma:=\{O_1\times\cdots\times O_n\,|\,O_i\in\tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

("מלבנים פתוחים" $\gamma:=\{O_1\times O_2\,|\,O_1\in\tau_1,O_2\in\tau_2\}$ במקרה של $n=2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap_F}=\gamma, X\in\gamma$



$$(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)$$

לכן (לפי הטענה) γ בסיס לטופולוגיה מסוימת $\gamma^\cup$. נגדיר

$$\tau_\Pi=\gamma^\cup$$

שקול: $O\in\tau_\Pi\Leftrightarrow(x_1,\cdots,x_n)\in O\Rightarrow\exists O_i\in\mathrm{N}(x_i)\quad O_1\times\cdots\times O_n\subseteq O$

משפט: $X=(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i,\tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

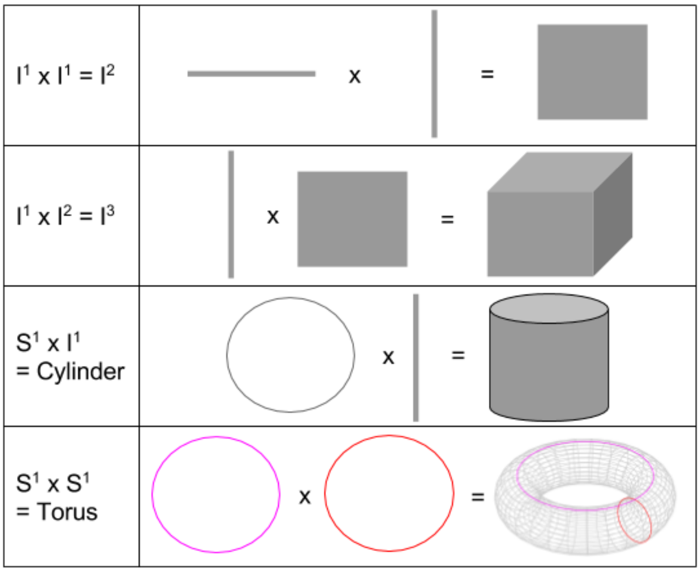
$$p_i:(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i,\tau_\Pi)\to(X_i,\tau_i)\quad (x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_i$$

בסיס סטנדרטי $\gamma:=\{O_1\times\cdots\times O_n\mid O_i\in\tau_i\}$ "תיבות בסיסיות". $\tau_\Pi=\gamma^\cup$.

פרה-בסיס סטנדרטי $\alpha:=\{p_i^{-1}(O_i)=X_1\times\cdots\times O_i\times\cdots\times X_n\mid O_i\in\tau_i\}$ "תיבות אלמנטריות"

אז

$$\alpha^{\cap_F}=\gamma\quad \tau_\Pi=(\alpha^{\cap_F})^\cup$$



טורוס n-ממדי $S_1^n=S_1\times\cdots\times S_1\simeq T^n$

הוא בעל מימד n קומפקטי (לכן לא הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$) אבל לכל נקודה יש סביבה שהומיאומורפית ל $\mathbb{R}^n$ (ז"א T^n **לוקלית** הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$).

מ"ל עבור $n=1$ (מדוע ?)

מספר תכונות:

- אם γ_1 בסיס של X_1 ו γ_2 בסיס של X_2 אז

$\gamma_1 \times \gamma_2 := \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \gamma_1, O_2 \in \gamma_2\}$ בסיס של $X_1 \times X_2$.

- אם α_1 בסיס לוקלי של X_1 **בנקודה** x_1 ו α_2 בסיס לוקלי של X_2 **בנקודה** x_2 אז

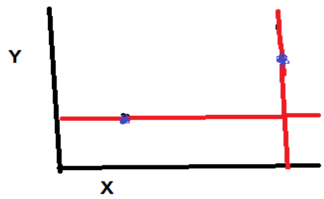
$\alpha_1 \times \alpha_2 := \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \alpha_1, U_2 \in \alpha_2\}$ בסיס לוקלי של $X_1 \times X_2$ בנקודה (x_1, x_2).

- אם A_1 צפוף ב X_1 ו A_2 צפוף ב X_2 אז $A_1 \times A_2$ צפוף ב $X_1 \times X_2$.
- $\{a\} \times X_2 \simeq X_2 \quad X_1 \times \{b\} \simeq X_1 \quad \forall a \in X_1, b \in X_2$

תרגילים מומלצים: (אם יהיה קשה ראו כאן selected exercises)

1. $X \times Y \in B_2 \Leftrightarrow X, Y \in B_2$
2. $X \times Y \in B_1 \Leftrightarrow X, Y \in B_1$
3. $X \times Y \in Sep \Leftrightarrow X, Y \in Sep$
4. $X \times Y \in Conn \Leftrightarrow X, Y \in Conn$

רמז דרך התמונה:



הערה: תכונה טופולוגית נקראת "כפלית סופית" אם היא נשמרת לגבי מכפלה טופולוגית סופית.

5. $X \in T_2 \Leftrightarrow \Delta := \{(x,x) : x \in X\}$ סגור במרחב מכפלה $X \times X$.
6. אם $Y \in T_2$ ו $f : X \to Y$ רציפה אז הגרף $Gr(f)$ סגור ב $X \times Y$.

שאלה: האם יש קשר בין שני התרגילים הקודמים ?

7. לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש

$$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y.$$

8. * Sorgenfrey plane $X := (\mathbb{R}, \tau_s) \times (\mathbb{R}, \tau_s)$ ספרבילי אבל מכיל תת מרחב לא ספרבילי.
9. $\mathbb{R} \setminus \{0\} \simeq \{1,2\} \times \mathbb{R}$
10. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S_1 \times \mathbb{R}$

טופולוגיה של סדר ליניארי

תזכורת: נניח $\le$ סדר ליניארי על קבוצה X ו $\tau_{\le}$ טופולוגית הסדר
(עם פרה-בסיס $\alpha:=\{(-\infty,b),(a,\infty):a,b\in X\}$. ז"א $\tau_{\le}=((\alpha^{\cap F})^{\cup}$)

דוגמה: למשל טופולוגיה של $\mathbb{R}$ או $[0,1]$ (או בעצם כל קטעים ב $\mathbb{R}$).

אזהרה: טופולוגית תת מרחב במרחב סדור ליניארי לא תמיד שווה לטופולוגיה של סדר מצומצם. למשל: $X:=\mathbb{R}$ $\quad Y:=[0,1)\cup\{2\}$.

<u>תרגילים:</u>

11. הוכיחו:

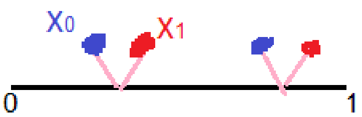
א. $(X,\tau_{\le})\in T_2$

ב. יחס הסדר $\{(x,y)\in X\times X: x\le y\}$ סגור במרחב מכפלה $X\times X$.

ג. אם $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\le y_n, \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$
אזי $x\le y$.

12. (**שאלת אתגר**) בקבוצה $X:=[0,1]\times\{0,1\}$ נגדיר Lexicographic Order

$$(a,b)\le_L(c,d)\Leftrightarrow a<c \quad or \quad a=c,b\le d$$



נדמיין "שהחלפנו" כל נקודה $x\in[0,1]$ בשתי נקודות x_0,x_1 עם הסדר $x_0<x_1$
(כאשר מסמנים $x_0:=(x,0),\ x_1:=(x,1)$)

הוכיחו:

א. $(X,\tau_{\le_L})\in Sep\cap B_1\cap T_2$.

ב. נקודות $(0,0),(1,1)$ הן מבודדות.

ג. $(X,\tau_{\le_L})$ מכיל תת מרחב $Y:=(0,1)\times\{1\}$ שהומיאומורפי לקו סורגנפרי.

ד. $(X,\tau_{\le_L})$ לא מטריזבילי.

הערה 1: למרחב $([0,1]\times\{0,1\},\tau_{\le_L})$ יש שמות שונים בספרות:

double arrow, split interval (לעיתים "מורידים" נקודות מבודדות $(1,1)$, $(0,0)$)

הערה 2: קיימות הכללות מעניינות וחשובות באישומים.

למשל: נניח $(K,\le)$ רבוצה עם סדר ליניארי. לכל תת קבוצה $A\subseteq K$ אפשר להגדיר

קבוצה סדורה לנארית חדשה $K_A := K\times\{0\}\cup A\times\{1\}$ עם **סדר לקסיקוגרפי**.

אינטויטיבת זה המצב שמפצלים נקודות רק מהקבוצה A.

למשל: תבדקו שאם ניקח קבוצה סדורה $[0,1]_{\{\frac{1}{2}\}}$ (מפצלים רק נקודה אחת $\frac{1}{2}\in[0,1]$) אז נקבל מרחב טופולוגי הומיאומורפי ל ("סכום" של שני קטעים סגורים)

הגדרה: נניח $(G,\cdot)$ חבורה ו - (G,τ) מ"ט.

אומרים ש - $(G,\cdot,\tau)\in TGr$ חבורה טופולוגית $(Topological\ Group)$ אם מתקיימים:

א. "כפל" $(a,b)\longmapsto a\cdot b \quad G\times G\xrightarrow{\cdot} G$ פונקציה רציפה.

(שקול: $\forall a_1,a_2\in G\ \forall U\in N(ab)\ \exists V_1\in N(a_1),V_2\in N(a_2)\quad V_1V_2\subseteq U$)

ב. "ההיפוך": $a\longmapsto a^{-1} \quad G\to G$ פונקציה רציפה.

(שקול: $\forall a\in G\ \ \forall U\in N(a)\quad U^{-1}\in N(a^{-1})$)

דוגמאות:

- כל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$ מגדיר חבורה טופולוגית $(E,+,\tau_{\|\cdot\|})$
- $(\mathbb{Z},+,top(d_p))$
- טורוס T^n חבורה טופולוגית קומפקטית (מה היא הפעולה ?)
- $GL(n,\mathbb{R})$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

הערה: בהגדרת TGr - (א) $\not\Leftarrow$ (ב).

דוגמה: $(\mathbb{R},+,\tau_s)$ בטופולוגית סורגנפריי.

תזכורת: $\mathbb{R}\supseteq O\in\tau_s \overset{def}{=} \forall x\in O\ \exists\epsilon>0{:}\,[x,x+\epsilon)\subseteq O$

למשל $[0,1)\in\tau_s$ פתוחה אבל לא $(-1,0]$ (שהוא מקור של $[0,1)$).

הסבר נוסף: $\lim\frac{1}{n}=0\ but\ \lim(-\frac{1}{n})\neq 0$.

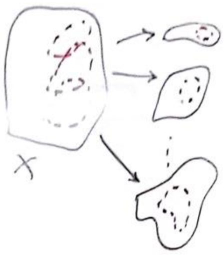
תרגיל: נניח G ח"ט. אז כל הזזה ימנית $T_a : G \to G, T_a(x) = xa$ הומיאומורפיזם (ז"א $T_a \in Homeo(G)$ נכון גם לשמאלית $_aT : G \to G,\ _aT(x) = ax$).

הסיקו שכל ח"ט היא הומוגנית.

הערה: על חבורות טופולוגיות ראו באתר http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html

<u>הגדרה:</u> טופולוגיה חלשה $(Weak\ Topology)$.

נניח X קבוצה. $(X_i, \tau_i) \in TOP$, $i \in I$ מ"ט ונתונה משפחה של פונקציות $X \xrightarrow{f_i} X_i$. אז



קיימת טופולוגיה τ_w על X כך ש

א. $(X, \tau_w) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)$ רציפות.

ב. בהינתן ש σ – טופולוגיה מסוימת על X כך ש

ג. $(X, \sigma) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)$ רציפות מתקיים $\sigma \supseteq \tau_w$

(ז"א τ_w היא **הכי חלשה כך שמתקיים א'**).

τ_w נקראת **"טופולוגיה חלשה"**. הגדרה פורמלית:

$\tau_w = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\alpha \coloneqq \{f_i^{-1}(O_i) \big| O_i \in \tau_i, i \in I\}$.

לפי הבנייה α פרה-בסיס ל - τ_w ו - $\gamma \coloneqq \alpha^{\cap_F}$ בסיס ל - τ_w.

דוגמאות של "טופולוגיה חלשה": מכפלה, תת-מרחב, טופולוגיה נקודתית, טופולוגיה שמוגדרת ע"י משפחת פסאודו-מטריקות, טופולוגיה חלשה במרחבים נורמיים ...

הרצאה 10

משפט: (טופולוגיה חלשה)

נניח (Y,σ) מ"ט ונתונה פונקציה $X \xrightarrow{g} Y$.

כמו קודם, τ_w מסמן טופולוגיה חלשה מעל X לגבי $(X_i,\tau_i) \underset{i\in I}{\xrightarrow{f_i}} X$.

אזי $(X_i,\tau_i) \underset{i\in I}{\xrightarrow{f_i\circ g}} Y$ רציפות $\Leftrightarrow$ $(X,\tau_w) \xrightarrow{g} Y$ רציפה.

הוכחה:

(⇒): ברור, כי הרכבה שומרת על רציפות.

(⇐):

צ"ל $(X,\tau_w) \xrightarrow{g} Y$ רציפה.

ש"ל $\forall O \in \tau_w: g^{-1}(O) \in \sigma$.

מ"ל (על פרה-בסיס = α). ז"א כאשר

$$\exists i \in I: f_i^{-1}(O_i) = O \in \alpha$$

$$(f_i \circ g)^{-1}(O_i) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(O_i)\right) = g^{-1}(O)$$

פתוחה בגלל רציפות של $f_i \circ g$.

■

תוצאה: τ_w הטופולוגיה הכי חלשה כך ש...

הסבר: זה נובע מהמשפט. אם ניקח $(X,\tau_w) \xrightarrow{g=id} X = Y$. מהרציפות נקבל $\tau_w \subseteq \sigma$.

מקרים פרטיים של טופולוגיה חלשה:

- **תת מרחב טופולוגי:**

$(X,\tau) \underset{\text{שיכון}}{\overset{i}{\hookrightarrow}} (Y,?)$ (Y תת קבוצה של X).

$$\tau_Y = \tau_w$$

שווה לטופולוגית תת מרחב (שכבר הגדרנו !).

שימו לב: $\forall O \in \tau \subseteq X: i^{-1}(O) = O \cap Y$

- **מכפלה טופולוגית של n גורמים** $(X_i,\tau_i)\ \ i \in \{1,\cdots,n\}$

$X = (\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_i : (\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi) \to (X_i,\tau_i) \quad (x_1,\cdots,x_n) \mapsto x_i$$

מתקיים $\tau_w = \tau_\Pi$ טופולוגית מכפלה כפי שהגדרנו ! $\tau_\Pi = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \cdots \times O_i \times \cdots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ פרה-בסיס "תיבות אלמנטריות".

- **הגדרה: מכפלה טופולוגית (אין הגבלה)** $(X_i,\tau_i)\ \ i \in I$

$$X = \left\{ I \xrightarrow{x} \bigcup_{i\in I} X_i\, , x(i) \in X_i \right\} = \prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{p_i} (X_i,\tau_i)$$

מכפלה קרטזית (כקבוצה). איבר טיפוסי "וקטור מוכלל" $x = (x_i)_{i\in I}$ (פונקציות)

היטלים: $p_{i_0}(x) = x(i_0) = x_{i_0}$

מגדירים $\tau_w = \tau_\Pi = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$ כטופולוגיה חלשה (טופולוגית *Tychonoff*).

$\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$ תיבות אלמנטריות. פרה-בסיס סטנדרטי

$\gamma := \alpha^{\cap_F} = \{\text{תיבות בסיסיות}\} = \{\cap_{j\in J} p_j^{-1}(O_j) \mid \text{סופי } J \subseteq I, O_j \in \tau_j\}$ בסיס סטנדרטי

הערות על מכפלה קרטזית $X = \prod_{i\in I} X_i$ **והיטלים** $\prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{p_i} X_i$

א. $p_i^{-1}(O_i) = O_i \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j$

ב. $p_i^{-1}(O_i) \cap p_k^{-1}(O_k) = O_i \times O_k \times \prod_{j\in I\setminus\{i,k\}} X_j$

ג. $p_k(\bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)) = \begin{Bmatrix} O_k & if\ k\in J \\ X_k & if\ k\notin J \end{Bmatrix}$

ד. $O\in\tau_\Pi \Leftrightarrow x=(x_i)_{i\in I}\in O \Rightarrow \exists\ finite\ J\subseteq I\ \exists O_j\in\tau_j \quad x\in\bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)\subseteq O$

שימו לב: תנאי $x\in\bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)$ שקול ל $x_j\in O_j \quad \forall j\in J$.

- <u>טופולוגיה המוגדרת דרך משפחת פסאודו-מטריקות:</u>

א. <u>תזכורת</u>: אם ρ פסאודו מטריקה מעל קבוצה X אז

$$top(\rho)=\{\text{פתוחות במובן }\rho\}=\{B_\rho(x,r)|x\in X,r>0\}^{\cup}=\gamma^{\cup}$$

ב. נניח שנתונה משפחה $\{\rho_i\}_{i\in I}$ של פסאודו-מטריקות על אותה קבוצה X.

מגדירים $\tau_w(\{\rho_i\}_{i\in I})$ כטופולוגיה חלשה של אוסף הפונקציות הזהות:

$$\left\{X\xrightarrow[i\in I]{id}(X,top(\rho_i))\right\} \qquad (\text{ז"א } \forall i: f_i=id)$$

לכן $\tau_w=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\alpha:=\{B_{\rho_i}(x,r)|\ x\in X,r>0,i\in I\}$

"כדורים" פרה-בסיס ל τ_w.

- <u>**טופולוגיה נקודתית**</u> על $X=C[0,1]$ (ניתן להכללות):

עבור $t\in[0,1]$ נגדיר פסאודו-מטריקה $\rho_t(f_1,f_2)=|f_1(t)-f_2(t)|$. נקבל

$$\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}$$
$$\downarrow$$
$$\tau_w\left(\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}\right)=:\tau_p$$

טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה נקודתית $(pointwise\ topology)$.

<u>הערה:</u> $\left(C[a,b],\tau_p\right)\subsetneq top(d_{max})$

המרחב $\left(C[a,b],\tau_p\right)$ הוא לא מטריזבילית אבל חשוב באנליזה.

אוסף γ קבוצות הבאות :

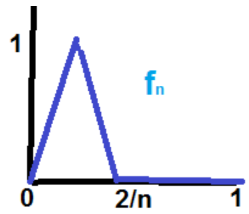
$$\gamma=\{V_{\varepsilon,p_1,p_2,\cdots,p_n}(g):\quad g\in C[a,b],\varepsilon>0,p_1,p_2,\cdots,p_n\in[a,b]\}$$

$$V_{\varepsilon,p_1,p_2,\cdots,p_n}(g)=\{f\in C[a,b]:|\ f(p_k)-g(p_k)|<\varepsilon\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה τ_p.

הערה: $(C[0,1],\tau_p)$ תת מרחב טבעי של מכפלה טופולוגית (חזקה) $\mathbb{R}^{[0,1]}$.

$\tau_p \neq top(d_{\max})$. למשל סדרת הפונקציות $f_n \in C[0,1]$ הבאה (עם $f_n(\frac{1}{n})=1$)



מתכנסת בטופולוגיה נקודתית τ_p לפונקצית האפס θ (כאשר $\theta(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

ראו שכל סביבה של θ מהטיפוס של γ מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה.

אבל אין התכנסות בטופולוגיה של $top(d_{\max})$ כי $d(f_n,\theta)=1$ (לא שואף לאפס).

הגדרה: $f:X\to Y$ נקרה **שיכון טופולוגי** אם פונקציה מושרת $f:X\to f(X)$ הומיאומורפיזם.

- **טופולוגיה p – אדית**:

$$top(d_p) = \tau_w\left\{\mathbb{Z} \xrightarrow[k\mapsto k+p^n\mathbb{Z}]{f_n} (\mathbb{Z}_{p^n}, discr) \quad n\in\mathbb{N}\right\}$$

בעצם פונקצית האלכסון $f(x)=(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad f=\Delta_{n\in\mathbb{N}} f_n : (\mathbb{Z},d_p)\to\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^n}$

מגדיר שיכון טופולוגי בתוך מכפלה טופולוגית.

($\mathbb{Z}_{p^n}=\{0,1,\cdots,p^n-1\}$ מסמן חבורה ציקלית סופית דיסקרטית עם p^n איברים).

- **טופולוגיה חלשה על מרחב Hilbert** $(l_2,\|.\|)$ היא טופולוגיה המושרית מאוסף של הפונקציונלים $\{f_a:l_2\to\mathbb{R} \quad f_a(x)=<a,x>: \quad a\in l_2\}$.

הערה: "כדור סגור" $B_r[\theta]$ קומפקטי בטופולוגיה חלשה הנ"ל. לעומת זאת $B_r[\theta]$ לא קומפקטי בטופולוגית מרחב נורמי $(l_2,\|.\|)$ (נלמד !) .

טענה: נניח $f_i:Y_i\to X_i$ פונקציות רציפות $\forall i\in I$.

הוכיחו "שפונקצית המכפלה" $f:=\prod_{i\in I} f_i$ הבאה היא רציפה

$f:\prod_{i\in I} Y_i \to \prod_{i\in I} X_i \quad f((y_i)_{i\in I})=(f_i(y_i))_{i\in I}$.

הוכחה: הרעיון הוא להשתמש במשפט "טופולוגיה חלשה".

נגדיר $Y:=\prod_{i\in I} Y_i, X=\prod_{i\in I} X_i$. נסמן ההטלות ב p_i^X, p_i^Y. אז יש לנו פונקציה $f:Y\to X$ כך ש $p_i^X\circ f=f_i\circ p_i^Y$. נתון ש f_i רציפות. לכן גם $f_i\circ p_i^Y$ ששווה ל $p_i^X\circ f$. לפי המשפט הנ"ל אפשר להסיק ש f רציפה.

☺

תוצאה: אם כל גורם $f_i:Y_i\to X_i$ הומיאומורפיזם אז גם $f:Y\to X$.
$Y_i\simeq X_i \Rightarrow \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} Y_i \simeq \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i$.

דוגמה: $\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}\simeq(-1,1)\times(0,7)\times(5,\infty)\times\mathbb{N}^2$

תרגיל: $S_2\setminus\{z\}\simeq(0,1)\times(2,4)$

הסבר: נזכיר $S_2\setminus\{z\}\simeq\mathbb{R}^2 \quad \forall z\in S_2$ היטל סטראוגרפי.

מצד שני, $\mathbb{R}^2\simeq(0,1)\times(2,4)$ בגלל הטענה הקודמת ו- $\mathbb{R}\simeq(a,b)$.

תרגיל: $X\times Y\simeq Y\times X$

נסו להוכיח וגם להכליל למקרה של *n* גורמים ותמורות. למשל
$X_1\times X_2\times X_3\simeq X_3\times X_2\times X_1$.

משפט: נניח $f_i:Y\to X_i$ פונקציות רציפות. אז "**פונקצית האלכסון**" $f:=\Delta_{i\in I} f_i$ הבאה $f:Y\to X=(\prod_{i\in I} X_i,\tau_\Pi) \quad f(y)=(f_i(y))_{i\in I}$
היא רציפה ומתקיים $f_k=p_k\circ f \quad \forall k\in I$.

הוכחה: $\forall y\in Y \quad (p_k\circ f)(y)=p_k(f(y))=p_k((f_i(y))_{i\in I})=f_k(y)$

נתון ש f_k רציפות (והוכחנו $f_k=p_k\circ f$). לכן לפי המשפט "טופולוגיה חלשה" גם f .

☺

דוגמה: $f_2:\mathbb{R}\to[-1,1], f_2(t)=\sin t \quad f_1:\mathbb{R}\to[-1,1], f_1(t)=\cos t$

$f = f_1 \Delta f_2 : \mathbb{R} \to [-1,1]\times[-1,1],\ f(t) = (\cos t, \sin t) \qquad f(\mathbb{R}) = S_1$.

הגדרה: פונקציה $f : X \to Y$ נקראת *פתוחה* אם תמונה של ת"ק פתוחה היא פתוחה.
באופן דומה מגדירים *פונקציה סגורה*.

דוגמאות:

- נניח $f : X \to Y$ פונקציה רציפה חח"ע ועל. אז הפונקציה הומיאומורפיזם אם"ם היא סגורה (פתוחה).
  קחו בחשבון $(f^{-1})^{-1} = f$ וקריטריונים לרציפות.
- הפונקציה $f(t) = cis2\pi t$ $f : [0,1) \to T$ היא לא פתוחה ולא סגורה.
- $f(x) = \begin{Bmatrix} x & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [1,3] \end{Bmatrix}$ $f : [0,3] \to [0,1]$ רציפה על (וסגורה, נלמד !)
  לא פתוחה (כי $X = (2,3)$ פתוחה ב $[0,3]$ אבל $f[0,3] = \{1\}$ לא פתוחה ב $Y = [0,1]$)
- היטל $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1$ רציפה, על, פתוחה, אבל **לא סגורה** כי
  $A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^2$ אבל $p_1(A) = (0,\infty)$ לא סגורה ב $\mathbb{R}$.

משפט: (פתיחות הטלות)

כל הטלה $p_i : (\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi) \to (X_i, \tau_i)$ היא פונקציה **פתוחה**.

הוכחה: צ"ל $p_k(O) \in \tau_k \quad \forall O \in \tau_\Pi$.

אם $O \in \gamma$ תיבה בסיסית אז

$$\exists \text{ finite } J \subseteq I \quad O = \bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)$$

נשתמש בשוויון ג $p_k(O) = p_k(\bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)) = \begin{Bmatrix} O_k & if\ k \in J \\ X_k & if\ k \notin J \end{Bmatrix}$.

התמונה היא פתוחה. זה מוכיח מקרה של $O \in \gamma$.

במקרה כללי קחו בחשבון ש γ בסיס ל τ_Π ותשתמשו ב t_3 (כל פונקציה שומרת איחודים).

☺

אזהרה: מכפלה קרטזית אינסופית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה

(בעצם אם ורק אם פתוחה אם כמעט כל הגורמים הם מרחבים עצמם בהתאמה).

$\left(\frac{1}{2},3\right)^{\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{2},3\right)\times\left(\frac{1}{2},3\right)\times\ldots$ **לא פתוחה** ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$(a,b)^{\mathbb{N}}$ <u>לא פתוחה</u> ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

<u>הסבר:</u> $X=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$

כאן $I=\mathbb{N}$ $\quad (X_n,\tau_n)=\mathbb{R}$

אם נניח בשלילה ש - $(a,b)^{\mathbb{N}}$ פתוח, אז $(a,b)^{\mathbb{N}}\in\tau_\pi=\gamma^{\cup}$. לכן

$\Leftarrow$ $(a,b)^{\mathbb{N}}$ מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.

לכן הוא מכיל $\ldots\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times O_m\times\ldots\times O_2\times O_1\supseteq\ldots\times(a,b)\times(a,b)$.

אבל זה גורר $\mathbb{R}\supseteq(a,b)$, סתירה!

<u>טענה שימושית</u>: במכפלה סופית אם γ_i בסיס ל τ_i אז $\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n$ בסיס ל $\tau_{\prod}$.

עבור מכפלה אינסופית: $\left\{\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(O_j)\,\middle|\, J\subseteq I \text{ סופי}, O_j\in\gamma_j\right\}$

תרגיל: הוכיחו:

א. $cl(\prod_{i\in I}A_i)=\prod_{i\in I}cl(A_i)$ לכל $A_i\subseteq(X_i,\tau_i)$ (אין הגבלה על I).

ב. $\operatorname{int}(A_1\times A_2)=\operatorname{int}(A_1)\times\operatorname{int}(A_2)$ (נכון לכל מספר **סופי**).

ג. תנו דוגמה שבה $\operatorname{int}(\prod_{i\in\mathbb{N}}A_i)\neq\prod_{i\in\mathbb{N}}\operatorname{int}(A_i)$

שאלה חשובה: מתי תכונה נשמרות ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

- (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)

$T_0,T_1,T_2,T_3,T_{3.5}$, קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט *Tychonoff*) ...

- (מכפלות סופיות ובנות מניה)

$\cdots,Sep,B_1,B_2,Metriz,\cdots$

- (מכפלות סופיות)

$discr$, קומפקטיות מקומית (נלמד !)

<u>הערה</u>: דיסקרטיות לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית (אפילו בת מנייה).

למשל $discr \not\in \mathrm{C} \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ הומיאומורפי לקבוצת קנטור (נלמד !)

<u>הערה:</u> מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מניה).

$$(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2) \in Metr$$

$$\to \left(X_1, \underbrace{top(\rho_1)}_{\tau_1}\right), \left(X_2, \underbrace{top(\rho_2)}_{\tau_2}\right) \in TOP$$

<u>טענה:</u> יש התאמה עם הגדרת טופולוגית τ_π "מטריקת מכפלה".

א) "מטריקה בסגנון אוקלידס"

$$d(x,y) \coloneqq \sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2 + \rho_2(x_2,y_2)^2}$$

ב) $d_1(x,y) \coloneqq \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2)$

ג) $d_{max}(x,y) \coloneqq \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)\}$

<u>תרגיל:</u>

א) $d \sim d_1 \sim d_{max}$ ה $X \coloneqq X_1 \times X_2$.

ב) $\underbrace{top(d) = top(d_1) = top(d_{max})}_{(א)\Rightarrow} = \underbrace{\tau_\pi}_{\text{טופולוגית מכפלה}}$

<u>מטריזציה במקרה של מכפלה בן מנייה</u>:

$$X = \prod_{i\in\mathbb{N}} (X_i,\rho_i) = X_1 \times X_2 \times \cdots$$

$d(x,y) \coloneqq \sup\{\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ אחת מהאפשרויות.

<u>קומפקטיות</u> "הכללה גאונית של סופיות"

<u>הגדרה</u> מרחב טופולוגי (X,τ) הוא **קומפקטי** אם לכל כיסוי פתוח $X = \bigcup_{i\in I} O_i$ שלו יש תת כיסוי סופי (ז"א קיימים $O_{i_1}, O_{i_2}, \cdots, O_{i_n}$ כך ש $X = O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$).

סימון: $(X,\tau) \in \mathrm{Comp}$.

הגדרה שקולה (קריטריון FIP תכונת החיתוך הסופי)

נניח $\{A_i : i \in I\}$ קבוצות סגורות ב (X,τ) כך ש $\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$. אז קיימים

$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_n}$ כך ש $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n} = \varnothing$.

הערה: קומפקטיות חשובה מאוד, בין היתר, "במשפטי קיום".

<u>תכונות ודוגמאות:</u>

- כל מרחב <u>סופי</u> הוא קומפקטי.
- $Comp \ni (X, \tau_{cofinite})$

<u>*הסבר:*</u> קבוצה קוספית היא מכסה כמעט הכל פרט למספר סופי של נקודות.

- $X \text{ is } finite \Leftrightarrow (X, \tau_{discr}) \in \text{Comp}$

<u>*הסבר:*</u> $\{\{x\} : x \in X\}$ כיסוי **פתוח** של X ...

<u>משפט:</u> אם (X,d) מ"מ כך ש $(X, top(d)) \in Comp$. אז (X,d) חסום.

הוכחה: ניקח $z \in X$, אז $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(z)$ כיסוי פתוח.

יש תת כיסוי <u>סופי</u> ואז $\exists n_0 : X = B_{n_0}(z)$. לכן $diam\, X \leq 2n_0$.

☺

<u>תוצאה:</u> $\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \notin Comp$, כל מרחב נורמי (לא מנוון).

<u>הגדרה:</u> תת קבוצה Y במרחב X נקראת **קומפקטית** אם $(Y, \tau_Y) \in \text{Comp}$.

משפט (קריטריון לתת קבוצה קומפקטית) התנאים הבאים שקולים:

א) Y תת קבוצה קומפקטית ב X.

ב) לכל אוסף $\alpha = \{O_i\}_{i\in I}$ של קבוצות פתוחות ב X שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$) קיים תת אוסף <u>סופי</u> $\{O_j\}_{j\in J}$, $J \subseteq I$ סופי שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{j\in J} O_j$).

<u>הסבר:</u> נובע מהגדרת תת מרחב טופולוגי.

- איחוד סופי תת קבוצות קומפקטיות גם קומפקטי.

הערה: לפי משפט Heine-Borel (נוכיח בהמשך):

תת מרחב X של $\mathbb{R}^n$ קומפקטי אם ורק אם X סגור וחסום ב $\mathbb{R}^n$.

<u>תרגיל</u>: תת קבוצה $Q \cap [0,1]$ סגורה וחסומה ב Q אבל לא קומפקטית.

זה אפשר להוכיח דרך הגדרה או דרך משפט Heine-Borel (לא סגור ב $\mathbb{R}$)

<u>תרגיל</u>: ת"ק $Y=[0,1]$ בקו סורגנפרי $(\mathbb{R},\tau_s)$ לא קומפקטית.

פתרון: נקודון $\{1\}$ מבודד ב Y. כיסוי $\alpha:=\bigcup_{n\geq 2}[0,\frac{n-1}{n})\cup\{1\}$ כיסוי פתוח ("בעייתי") של Y ללא תת כיסוי סופי. (שימו לב: $[0,1]\cap[1,2)=\{1\}$ פתוחה בתת מרחב $[0,1]$ של $(\mathbb{R},\tau_s)$)

<u>הערה</u>: קומפקטיות לא תורשתית $\underbrace{[0,1]}_{\in Comp}\supset\underbrace{(0,1)}_{\notin Comp}$

הסבר: $\alpha:=\{(\frac{1}{n+1},1):n\in\mathbb{N}\}$ כיסוי פתוח "בעייתי" (ללא תת כיסוי סופי) של $(0,1)$)

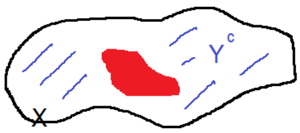
הסבר שקול (דרך FIP) $\alpha:=\{(0,\frac{1}{n+1}]:n\in\mathbb{N}\}$ משפחת קבוצות סגורות עם FIP אבל

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\tfrac{1}{n+1}]=\varnothing$$

אבל יש תורשתיות קומפקטיות לגבי תת קבוצות <u>סגורות</u>.

<u>משפט</u>: נניח $X\in Comp$, $Y\subseteq X$ תת קבוצה <u>סגורה</u>. אז גם $Y\in Comp$.

<u>הוכחה</u>:



נניח $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב X כך ש $Y\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$

<u>הרעיון</u>: להוסיף Y^c (קבוצה פתוחה) לאוסף α ואז מתקבל אוסף חדש $\alpha^*=\alpha\cup\{Y^c\}$. הוא בעצם <u>כיסוי פתוח</u> של X.

$X\in Comp$ $\Leftarrow$ קיים תת כיסוי <u>סופי</u> $\gamma\subseteq\alpha^*$. Y^c לא משתתף בכיסוי של Y לכן אם מורידים Y^c מ γ (בתנאי שהוא נמצא שם) אז עדיין נקבל כיסוי של Y. לכן נקבל תת אוסף סופי ל α (ולא ל α^*) שמכסה את Y. אז $Y\in Comp$ עפ"י קריטריון לתת קבוצות.

■

<u>משפט</u>: תמונה רציפה שומרת על $Comp$.

<u>הוכחה</u>: $X\in Comp$. f רציפה ועל $f(X)=Y$. צ"ל $Y\in Comp$.

נניח $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של Y. צ"ל קיים כיסוי <u>סופי</u>.

$\Leftarrow Y = \bigcup_{i\in I} O_i$

.$X = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$

$\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$ כיסוי <u>פתוח</u> של X $\quad$ ($f^{-1}(O_i)$ פתוח בגלל ש – f רציפה).

$X \in Comp \Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי ל - $\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$, ז"א קיים $J \subseteq I$ סופי כך ש –

$$X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)$$

אז מכאן $\quad Y = f(X) = f\left(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)\right) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j\in J} O_j$

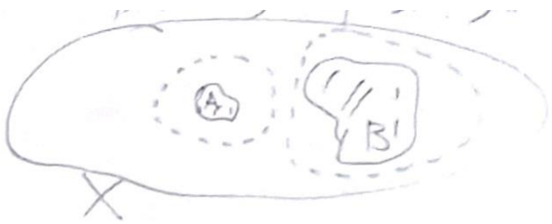
(תמיד $ff^{-1}(A) \subseteq A$ אבל אם f על אז $ff^{-1}(A) = A$)

מצאנו תת כיסוי סופי $\{O_j\}_{j\in J}$ ל α.

■

<u>**תרגיל:**</u> נניח $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו $f([a,b]) = [c,d]$.

<u>**משפט (ההפרדה):**</u> נניח $X \in T_2$, A, B תת קבוצות קומפקטיות וזרות. אזי קיימת סביבות (פתוחות) זרות.



<u>**הוכחה:**</u>

<u>מקרה א'</u> $A = \{a\}$

<u>הערה:</u> קל להוכיח בהנחה נוספת אם B סופית (חיתוך סופי).

הרעיון הוא להפעיל את הקומפקטיות של B ...

$$X \in T_2 \Rightarrow \boxed{\forall b \in B\ \exists U_b \in N(a)\ \exists V_b \in N(b): U_b \cap V_b = \emptyset}$$

U_b ו V_b סביבות פתוחות.

$\alpha = \{V_b\}_{b\in B}$ כיסוי פתוח של תת קבוצה B במרחב X.

בגלל קריטריון (3) $\Leftarrow$ קיים תת כיסוי <u>סופי</u>

$$\exists\ \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B: \qquad B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i} \underbrace{=:}_{\text{נסמן}} V \in N(B)$$

V סביבה פתוחה של B. נגדיר בהתאמה

$$N(a) \ni U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}$$

מ (t_2) נקבל שזוהי סביבה פתוחה של a. כעת, לכל $i \in \{1, \dots, n\}$

$$U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

הוכחנו את מקרה א'.

<u>מקרה ב' (כללי)</u>

בעזרת שלב א':

$$\forall a \in A\ \exists U_a \in N(a)\ \exists V_a \in N(B): U_a \cap V_a = \emptyset$$

כאשר U_a, V_a סביבות פתוחות. $\alpha = \{U_a\}_{a \in A}$ כיסוי פתוח של A במרחב X.

$$X \supseteq A \in Comp$$

לכן שוב לפי הקריטריון יש תת כיסוי סופי

$$\exists\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A: N(A) \ni U := \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i} \supseteq A$$

נגדיר $N(B) \ni V := \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i} \supseteq B$ V פתוח בגלל - (t_2).

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i}\right) = \emptyset$$

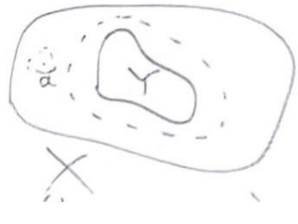
$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

■

<u>משפט (הסגירות):</u> נניח $X \in T_2$, $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי Y סגורה ב X.

<u>הוכחה:</u>



ניקח $a \notin Y$ (בה"כ קיימת!).

צ"ל $a \notin \bar{Y}$.

לפי משפט ההפרדה, קיימות סביבות פתוחות וזרות $U \in N(a), V \in N(Y)$ כך ש

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U \cap Y = \emptyset$$

ולכן $a \notin \bar{Y}$ ולכן Y סגור.

■

הרצאה 11

<u>משפט (הנורמליות):</u> $X \in T_4 \Leftarrow \begin{cases} X \in T_2 \\ X \in Comp \end{cases}$

ניסוח שקול: $Comp \cap T_2 \subset T_4$

<u>הוכחה:</u> A, B תת קבוצות סגורות וזרות. $A, B \in Comp$

(כתת קבוצה סגורה בקומפקטי). אז לפי משפט ההפרדה קיימות סביבות זרות.

■

<u>משפט:</u> (תנאי מספיק לסגירות פונקציות)

נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה. אזי f פונקציה **סגורה**.

<u>הוכחה:</u>

צ"ל $f(A)$ סגורה ב Y לכל A סגורה ב X.

$$\underbrace{A}_{\text{סגור}} \subseteq X \in Comp$$

אז לפי משפט שהוכחנו $A \in Comp$.

לפי משפט תמונה רציפה שומרת על $Comp$. נקבל (מהתורשתיות של רציפות גם)

$$T_2 \ni Y \supseteq f(A) \in Comp$$

$f(A)$ סגור לפי משפט שהוכחנו (סגירות של פונקציה ...).

■

<u>משפט (על השיכון והומיאומורפיזם):</u>

נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה <u>וחח"ע</u>. אזי f <u>שיכון טופולוגי</u>

(ז"א $f:X\to f(X)$ הומיאומורפיזם).

<u>**הוכחה:**</u> מ"ל את המשפט בהנחה ש f <u>על</u>. ואז צ"ל f הומיאומורפיזם.

תנאים (1) ו (2) בהגדרת הומיאומורפיזם מתקיימים עפ"י הנתון (ישר).

3) רציפות של ההופכי $X \xleftarrow{f^{-1}} Y=f(X)$

לפי קריטריון 3 על רציפות, מספיק להראות ש f פונקציה סגורה. כאן נשתמש במשפט הקודם.

■

<u>**הערה:**</u> א. במקרה הפרטי, אם בנוסף f <u>על</u> אז נקבל הומיאומורפיזם.

ב. קומפקטיות של X חשובה מאוד. ראינו דוגמאות...

ג. $f(X)$ סגור.

<u>**תוצאה**</u>: נניח $(X,\tau)\in \mathrm{Comp}$ ו σ טופולוגיה על X עם תכונת T_2 (*Hausdorff*) כך ש $\sigma\subseteq\tau$. אז $\sigma=\tau$.

<u>**משפט (הכללת משפט ויירשטרס):**</u> נניח $X\in Comp$, $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי f חסומה ומקבלת Max, Min מוחלטים.

<u>**הוכחה:**</u>

$Comp$ נשמרת ע"י תמונה רציפה. לכן $\mathbb{R}\supset f(X)\in Comp$

$f(X)$ תת מרחב מטרי ב - $\mathbb{R}$, אז $f(X)$ חסומה!

$$\mathbb{R}\ni B\coloneqq \sup\{f(x)|x\in X\}\in\overline{f(X)}$$

$$\mathbb{R}\ni A\coloneqq \inf\{f(x)|x\in X\}\in\overline{f(X)}$$

מצד שני, $f(X)$ סגור בגלל משפט הסגירות (כלומר $f(X)=\overline{f(X)}$) ולכן מתקבלים

$$B=Max\, f$$

$$A=Min\, f$$

■

<u>**תרגילים:**</u>

1) נניח (X,d) מ"מ, $A,K\subseteq X$ לא ריקות, $K\in Comp$. אזי:

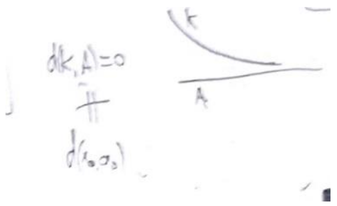
א) קיימת נקודה $x_0\in K$ כך ש $\boxed{d(K,A)=d(x_0,A)}$

<u>רמז:</u> פונקציית המרחק...

ב) אם גם $A\in Comp$, אז $\exists a_0\in A,\exists x_0\in K: \boxed{d(K,A)=d(x_0,a_0)}$

<u>דוגמה נגדית</u> (אפילו לקבוצות

סגורות) ב $\mathbb{R}^2$:



ב $\mathbb{R}$: $\underbrace{B=\left\{n+\frac{1}{2n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\},A=\mathbb{N}}_{\text{סגורות}}$

$0=d(A,B)\neq d(a_0,b_0)$ (לכן inf לא מתקבל!)

חסימות כליל

<u>הגדרה</u>: נניח נתון $\varepsilon>0$. תת קבוצה A במרחב מטרי (X,d) נקראת **ε-צפופה** אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש $d(a,x)<\varepsilon$.

(אומרים ש: a מקרב את x עד כדי ε)

הגדרה שקולה: $\bigcup\limits_{a\in A}B_\varepsilon(a)=\mathrm{X}$

<u>הגדרה</u>: מ"מ (X,d) נקרא **חסום כליל** (totally bounded) אם :

לכל $\varepsilon>0$ נתון קיימת תת קבוצה **<u>סופית</u>** A_ε שהיא ε-צפופה ב (X,d).

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה Y במ"מ (X,d) נקראת **חסומה כליל** אם מרחב (Y,d_Y) ח"כ.

דוגמה: $\mathrm{X}=\mathbb{R}\supset[0,1]=\mathrm{Y}$, אז ת"ק $\mathrm{A}_{\frac{1}{n}}=\{\frac{i}{n}:i\in\{0,1,\cdots,n\}\}$ היא $\frac{1}{n}$-צפופה ב Y

תרגיל: ב $\mathrm{Y}=[0,1]\times[0,1]$ למצוא ת"ק סופית שהיא $\frac{1}{100}$-צפופה.

<u>משפט</u>: אם מרחב מטרי (X,d) קומפקטי אז הוא חסום כליל.

<u>הוכחה</u>: לכל $\varepsilon>0$ נתון לכיסוי פתוח $\bigcup\limits_{a\in X}B_\varepsilon(a)=\mathrm{X}$ יש תת כיסוי סופי.

דוגמה: (X,d_Δ) תמיד חסום אבל לא ח"כ עבור X אינסופית.

<u>תכונות</u>:

- מרחב חסום כליל הוא תמיד חסום (אבל לא תמיד ההפך).
- (תושתיות) אם (X,d) חסום כליל אז גם כל תת קבוצה ח"כ.
- איחוד **<u>סופי</u>** של תת קבוצות שכל אחת ח"כ גם ח"כ.
- אם תת מרחב מטרי (Y,d_Y) של מ"מ (X,d) ח"כ אז גם הסגור $cl(Y)$ ח"כ.
- אם $(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)$ ח"כ אז גם מכפלה $(X_1\times X_2,\rho)$ עם "מטריקה רוקלידית" הוא גם חסום כליל.

<u>דוגמה</u>: $Y=\{e_n:n\in\mathbb{N}\}$ חסום אבל לא ח"כ (ולא קומפקטי) במרחב הילברט $X=l_2$.

תרגיל: $B_r[a]$ לא קומפקטי ב l_2.

<u>תרגיל:</u> תנו דוגמאות של מ"מ ח"כ שהוא לא קומפקטי.
<u>Spoiler</u>: מ"מ הוא קומפקטי אם"ם הוא ח"כ ושלם (משפט שנוכיח בהמשך).

<u>תזכורת</u>: השלמה $(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_p}) \hookleftarrow (\mathbb{Z},d_p)$ כאשר:

$$\overline{\mathbb{Z}}=\{\text{מספרים } p-\text{אדיים}\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}b_kp^k\,,b_k\in\underbrace{\{0,1,\dots,p-1\}}_{\text{שאריות מודולו } p}=\mathbb{Z}_p\right\}$$

שהוא קומפקטי (<u>Spoiler</u>). בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שמ"מ $(\mathbb{Z},d_p)$ חסום כליל ולא קומפקטי

<u>הסבר מקוצר</u>: לא קומפקטי כי המרחב לא שלם. למשל הסדרה $a_n=1+p+p^2+\cdots+p^n$ היא ק"ס אבל לא מתכנסת (תרגול).
רמז לגבי ח"כ: תת קבוצה $\{0,1,\cdots,\mathrm{p}^k-1\}$ היא ε-צפופה עבור $\varepsilon=?$
ראו תמונות במקרה של $p=3$

ת"ק $\{0\}$ ε-צפופה לכל $1<\varepsilon$

ת"ק $\mathrm{A}:=\{0,1,2\}$ ε-צפופה לכל $\frac{1}{3}<\varepsilon$

הסבר: שאריות מודולו 3 הן בדיוק $\mathrm{A}=\{0,1,2\}$.

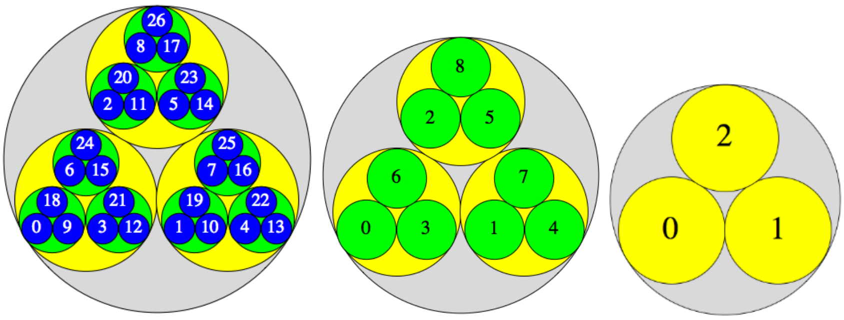
לכן לכל $x\in\mathbb{Z}$ קיים $a\in A$ כך ש $3|(x-a)$. מכאן $d_3(x,a)\le\frac{1}{3}$.

. . .

ת"ק $\mathrm{A}:=\{0,1,2,\cdots,3^n-1\}$ ε-צפופה לכל $\frac{1}{3^n}<\varepsilon$ (ראו תמונות למטה)

שאלה: א. כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}, d_3})$ לפי התמונות הבאות ?

ב. בתרגול הראשון למדתם על האולטרה מטריקה של מרחק בין מילים, מה הקשר?



משפט: אם (X, d) מ"מ קומפקטי (ז"א $(Comp \ni (X, top(d))$ אזי

א. (X, d) חסום כליל (ולכן גם חסום).

ב. $X \in Sep$

ג. $X \in B_2$

ד. העוצמה של X היא לכל היותר עוצמה של ממשיים.

הוכחה: א **תזכורת**: לכל ε-כיסוי $\{B(x,\varepsilon) : x \in X\}$ יש תת כיסוי סופי.

ב. כל חסום כליל הוא ספרבילי

(כי אם A_ε סופי ו- ε-צפוף ב (X, d) אז $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$ בת מניה וצפופה ב X).

ג. במרחבים מטריזביליים ספרביליות ו B_2 שקולות.

ד. **טענה כללית**: כל מרחב מטריזבילי וספרבילי הוא בעל עוצמה לכל היותר עוצמה של ממשיים.

הוכחה: ניקח תת קבוצה צפופה (ז"א $cl(A) = X$) בת מניה A ב X.

בגלל המטריזביליות $\mathrm{scl(A) = cl(A)}$. לכן נקבל $\mathrm{scl(A)} = X$.

לכל איבר $x \in X$ נבחר בסדרה אחת $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש $a_n \in A,\ x = \lim a_n$. נגדיר פונקציה

$$\sigma : \mathrm{X} \to \mathrm{P(A)} \quad \sigma(x) = \{a_n \,|\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{A}$$

זאת פונקציה **חח"ע** (כי במרחב מטרי הטווח של סדרה מתכנסת קובעת חד משמעית את הגבול. בין היתר, אין תלות בתמורות של איברים בסדרה)

לכן $card(X) = \mathrm{card}(\sigma(\mathrm{X})) \le card\ P(\mathrm{A}) \le 2^{\aleph_0} = card\,\mathbb{R}$.

סימון: $card(A)$ = העוצמה של A (מהמילה: cardinality)

■

<u>הגדרה:</u> נניח $\alpha = \{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תת קבוצות בקבוצה X.

א) $\boldsymbol{\alpha \in FIP}$ תכונת החיתוך הסופי, אם $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$ לכל $J \subseteq I$ **<u>סופית</u>**.

ב) $\boldsymbol{\alpha \in IP}$ אם $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

(ברור ב $\Leftarrow$ א).

<u>דוגמה:</u> כל סדרה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ יורדת $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ של קבוצות לא ריקות היא FIP

למשל: $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}, n \in \mathbb{N}$

$$\alpha = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP \backslash IP$$

<u>קריטריון FIP של $Comp$:</u> נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Comp$.

2) $$IP \ni \alpha \Leftarrow \begin{cases} FIP \ni \alpha = \{A_i\}_{i\in I} \\ \forall i \in I: \text{סגורה } A_i \end{cases}$$

<u>הסבר:</u>

שימו לב ש $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X אם ורק אם האוסף של המשלימים $\{O_i^c\}_{i\in J}$ (קבוצות סגורות) הוא לא מקיים IP.

$$\bigcup O_i = X \leftrightarrow \bigcap O_i^c = \emptyset$$

כללי de Morgan והגדרת $Comp$...

■

<u>דוגמה:</u> $\mathbb{R} \notin Comp$ (דרך FIP).

$A_n := [n, \infty), n \in \mathbb{N}$ סגורות ו- $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP \backslash IP$$

<u>דוגמה:</u> $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \notin \text{Comp}$

$A_k = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, k \le n\}$ **סגור** ב Y $\quad A_1 \supset A_2 \supset \cdots \quad \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$.

הערה: באופן דומה אפשר להפריך קומפקטיות כשיש סדרה ללא תת סדרה מתכנסת.

תזכורת: <u>קריטריון החיתוך $Cantor$ לשלמות</u> **(מאינפי):**

התנאים הבאים שקולים:

א) (X,d) מ"מ שלם.

ב) לכל סדרה יורדת $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$

של קבוצות סגורות כך ש $diam(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מתקיים

$$\{c\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$

משפט: כל מרחב מטרי (X,d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

הוכחה: (דרך קריטריון קנטור + קריטריון *FIP*)

נניח נתונה סדרה יורדת של קבוצות סגורות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - $\quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$

כך ש $diam(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. אז

$$\alpha = \{A_n\} \in FIP$$

A_n סגור. לכן בגלל הקומפקטיות אכן $\bigcap_{n\in I} A_n \neq \emptyset$.

$$\Downarrow$$

$$\alpha \in IP$$

ואז מקריטריון קנטור נקבל המרחב הוא שלם.

■

משפט $(Heine - Borel)$:

נניח $X \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Comp$.

2) X חסום וסגור.

הוכחה:

$(1) \Leftarrow (2)$:

חסימות. כל מ"מ קומפקטי הוא חסום (הוכחנו יותר: ח"כ)

סגירות. $\mathbb{R}^n \in T_2$. נפעיל את משפט הסגירות.

$(1) \Rightarrow (2)$:

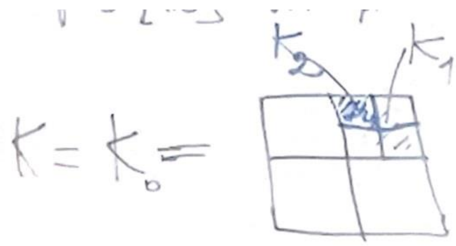
נניח X חסום וסגור. קיימת קובייה $K \subset \mathbb{R}^n$ כך ש $\quad X \subseteq K$

דרך א': בה"כ $\quad K = [a,b]^n$

אז לפי $Tychonoff$, אכן $K \in Comp$ (אם ידוע ש - $[a,b] \in Comp$).

<u>דרך ב' ($Cantor$):</u>

נניח בשלילה ש - $K \notin Comp$.



ז"א יש כיסוי α פתוח של K ללא תת כיסוי סופי. נחלק תתי קוביות (מספר = 2^n) דרך החלוקה של הצלעות. נקרא לתת קובייה – "קובייה בעייתית" אם אין תת כיסוי סופי עבור הכיסוי הנ"ל. אז יש לפחות תת קובייה אחת בעייתית K_1.

באופן דומה נחלק לתתי קוביות ואז יש תת קובייה $K_2 \subset K_1$ כך ש - K_2 בעייתית.

אז נקבל – $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$

סדרה יורדת של קוביות (סגורות לא ריקות).

$$diam(K_i) \to 0$$

$\mathbb{R}^n$ שלם, לכן לפי קריטריון קנטור: יש איבר משותף $\{c\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$

$c \in K$. לכן קיים איבר מסוים של הכיסוי $O_j \in \alpha$ כך ש – $c \in O_j$

בגלל הפתיחות $\exists r > 0: B_r(c) \subset O_j$

לכן – $\exists m \in \mathbb{N}: c \in K_m \subset B_r(c) \subset O_i$

קיבלנו ש K_m מכוסה ע"י איבר אחד O_i של הכיסוי.

לכן K_m לא בעייתית בסתירה לבנייה!

■

<u>הערה:</u> משפט $Heine - Borel$ לא נכון אם מחליפים $\mathbb{R}^n$ במרחבים מטריים או נורמיים אחרים (אפילו למרחב הילברט)

<u>דוגמה:</u> במרחב הילברט l_2 יש תת קבוצה חסומה וסגורה לא קומפקטית.

למשל: $A \coloneqq \{e_1, e_2, \ldots\} \subset l_2$ (דיסקרטי אינסופי לכן לא קומפקטי).

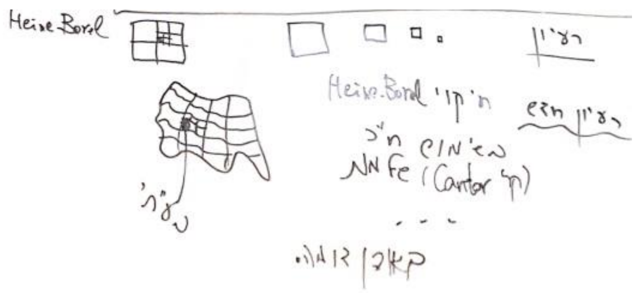
<u>משפט (קומפקטיות במרחב מטרי):</u> נניח (X, d) מ"מ. התנאים הבאים שקולים:

1) $X = (X, top(d)) \in Comp$.

2) $X \in SComp$ (לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת).

3) $X \in BW$ (תכונת Bolzano-Weierstrass) לכל קבוצה <u>אינסופית</u> ב- X יש נקודת הצטברות).

4) (X, d) שלם וחסום כליל.



<u>הוכחה:</u>

<u>$(4) \leftarrow (1)$</u>:

דומה למשפט $Heine - Borel$

(נדלג על הוכחה מפורשת)

<u>$(1) \leftarrow (2)$</u>:

נניח בשלילה שלא, כלומר $X \notin SComp$.

זאת אומרת, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ללא ת"ס מתכנסת ב – X.

נגדיר $\emptyset \neq A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

ברור $A_1 \supset A_2 \supset \cdots A_n \supset \cdots$ לכן $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP$.

<u>הערה:</u> A_n סגורות. זה נובע מ –

1) <u>במ"מ</u> ידוע ש - $cl(A) = scl(A)$.

2) פרמוטציה של סדרה לא משפיעה על ההתכנסות (או אי התכנסות)

(כאשר אנו משתמשים בהגדרת התכנסות דרך – בכל כדור של הגבול יש <u>כמעט כל האיברים</u>).

כעת $\begin{cases} X \in Comp \\ FIP \ni \{A_n\} \end{cases} \Rightarrow \{A_n\} \in IP$

זה גורר שקיימת נקודה $c \in \bigcap A_n \neq \emptyset$.

לכן קיימת תת סדרה קבועה $c, c, \dots$ של הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (בסתירה להנחה שאין ת"ס מתכנסת).

<u>$(2) \leftarrow (3)$</u>:

נניח $A \subseteq X$ <u>אינסופית</u>. צ"ל $A' \neq \emptyset$.

בגלל אינסופיות קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב – A עם איברים <u>שונים</u>.

$X \in SComp \Leftarrow$ קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסת ב – X.

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b \wedge a_{n_k} \text{ שונים}$$

$$\Downarrow$$

$$b \in A'$$

$$\Downarrow$$

$$A' \neq \emptyset$$

(3) ← (2):

נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב X. נוכיח שיש ת"ס מתכנסת.

נגדיר $X \supset A \coloneqq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (תמונה של הסדרה).

אם A סופית אז יש איבר בסדרה שחוזר אינסוף פעם ואז יש תת סדרה קבועה (מתכנסת!).

אם A אינסופית אז לפי הנתון (3): $X \in BW$.

אז קיימת נקודת הצטברות $z \in A'$.

(*) אז קיימת סדרה עם איברים שונים ב A ששואפת ל z.

ע"פ אותה הערה על הפרמוטציות...

בה"כ ניתן להניח שיש תת סדרה של $\{x_n\}$ המקיימת את (*).

לכן קיבלנו ת"ס מתכנסת!

(2) ← (4):

- קודם כל נוכיח שלמות של (X, d)

נניח $\{x_n\}$ סדרת קושי. צ"ל שהיא מתכנסת.

תכונה (2) ⇐ יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת ב – X.

תכונה m_3 של מרחבים מטריים ⇐ אם לסדרת קושי יש ת"ס מתכנסת, אז גם הסדרה מתכנסת.

- כעת נוכיח ש (X, d) ח"כ.

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ יש תת קבוצה סופית שהיא ε– צפופה (רשת).

נניח בשלילה שקיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שאין ε_0 – רשת. בונים סדרה ללא ת"ס מתכנסת:

ניקח $x_1 \in X$ אז $X \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$ (אחרת $\{x_1\}$ ε_0 – רשת ב (X, d)).

ניקח $x_2 \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$. אז מתקיים – $B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2) \neq X$

אחרת $\{x_1, x_2\}$ ε_0 – רשת (שימו לב: $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$).

נמשיך כך... נקבל סדרה ... ,x_1, x_2, x_3.

$$\forall i \neq j : d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$$

אז ברור שאף ת"ס של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא ס"ק .

זה גורר שלסדרה הנ"ל אין ת"ס מתכנסת!

■

הרצאה 12

קומפקטיות של מכפלה טופולוגית

משפט: (tube lemma)

נניח X,Y מרחבים טופולוגיים, Y קומפקטי, $a\in X$. אז לכל סביבה פתוחה $\{a\}\times Y\subset N$ (במכפלה $X\times Y$) של הפיסה $\{a\}\times Y$ קיימת קבוצה פתוחה $W\subset X$ מספיק קטנה כך ש $\{a\}\times Y\subset W\times Y\subset N$.

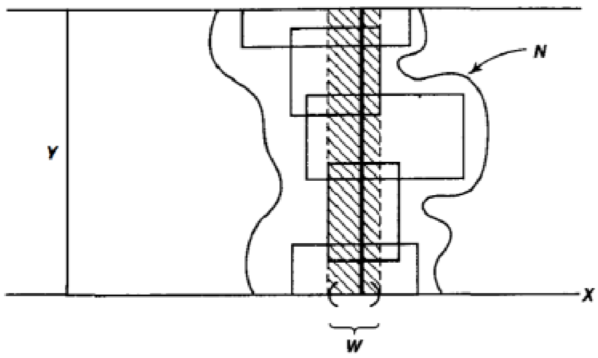
הוכחה: "מלבנים פתוחים" הם בסיס לטופולוגית מכפלה $\tau_{\prod}$ לכן לכל $y\in Y$ קיימות סביבות פתוחות $a\in U_y$ (ב X), $y\in V_y$ (ב Y) כך ש

$$(a,y)\in U_y\times V_y\subset N$$

$\{V_y : y\in Y\}$ כיסוי פתוח של Y. בגלל הקומפקטיות של Y יש מספר סופי של איברים $y_1,y_2,\cdots,y_n\in Y$ כך ש $V_{y_1}\cup V_{y_2}\cup\cdots\cup V_{y_n}=Y$.

נגדיר $W:=U_{y_1}\cap U_{y_2}\cap\cdots\cap U_{y_n}$ (סביבה פתוחה ל a ב X). אזי

$$\{a\}\times Y\subset W\times Y\subset N.$$



■

משפט (קומפקטיות של מכפלה סופית): אם X,Y קומפקטי אז גם $X\times Y$.

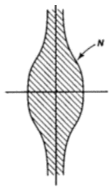
הוכחה: נניח Ω כיסוי פתוח של $X\times Y$. לכל $x\in X$ הפיסה $\{x\}\times Y\simeq Y$ ת"ק קומפקטית ב $X\times Y$. לכן קיים תת אוסף **סופי** Ω_x שמכסה את $\{x\}\times Y$. אז

$$\{x\}\times Y\subset\cup\Omega_x$$

לפי "משפט צינור" קיימת קבוצה פתוחה $W_x \subset X$ כך ש
$$.\{x\}\times Y \subset W_x \times Y \subset \cup\Omega_x$$
בגלל הקומפקטיות של X קיימים מספר סופי איברים $x_1,\cdots,x_n \in X$ כך ש
$$.W_{x_1}\cup\cdots\cup W_{x_n} = X$$
אז נקבל שתת אוסף **סופי** $\Omega_{x_1}\cup\cdots\cup\Omega_{x_n}$ של Ω מכסה את $X\times Y$.

■

תרגיל: תנו דוגמה נגדית למשפט הצינור אם Y לא קומפקטי. רמז:



משפט טיכונוף (1935) [Tychonoff Theorem]

נניח $X=\prod_{i\in I} X_i$ מכפלה טופולוגית. אזי X קומפקטי אם ורק אם כל X_i קומפקטי.

הוכחה:

(כוון אחד)

אם X קומפקטי אז כל X_i היא גם קומפקטי כתמונה רציפה של X לגבי העתקת ההטלה: $p_i : X\to X_i$.

(כוון שני)

דרך א. בעזרת קריטריון קומפקטיות Alexander (דרך תת בסיס).

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות דרך FIP (תכונת החיתוך הסופי).

<u>קריטריון קומפקטיות Alexander</u> :

נניח X מרחב טופולוגי ו β תת בסיס (פרה-בסיס) של הטופולוגיה. אזי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $C\subset\beta$ של X (דרך איברים של β) קיים תת כיסוי סופי.

<u>הוכחה של הקריטריון</u>: (**<u>נדלג על ההוכחה</u>**)

כיוון אחד ברור (הגדרה של הקומפקטיות).

כיוון שני: נניח מ"ט X ופרה-בסיס שלו β מקיימים את התנאי של Alexander.

צ"ל ש X קומפקטי. נניח בשלילה שלא. אז קיים כיסוי פתוח C של X ללא תת כיסוי סופי.

נקרא לכיסוי פתוח "בעייתי" אם אין תת כיסוי סופי.
בה"כ ניתן להניח ש C הוא כיסוי בעייתי *מכסימלי*.
הערה: מכסימליות פירוש הדבר – אין גדול ממנו (ולא בהכרח הכי גדול) ז"א כל כיסוי פתוח של X המכיל את C ושונה ממנו הוא לא בעייתי.
<u>הסבר:</u> על מנת להוכיח הקיום של כיסוי כזה נשתמש בלמה של צורן.
שימו לב שאם נתון שרשרת של כיסויים בעייתים אזי האיחוד הוא גם בעייתי.
בגלל המכסימליות של C הוא מקיים את התכונה הבאה:
(*) אם O קבוצה פתוחה שלא שייכת ל C אז $C\cup\{O\}$ לא בעייתי ולכן קיים תת אוסף סופי C_0 של C כך ש $C_0\cup\{O\}$ מכסה את X.
האוסף $C\cap\beta$ הוא לא מכסה את X
(אחרת תנאי של Alexander גורר ש C לא בעייתי).
לכן קיימת נקודה $z\in X$ כך ש z לא מכוסה ע"י $C\cap\beta$.
קיים $U\in C$ כך ש $z\in U$ (כי C כיסוי).
לפי הגדרת תת בסיס ($\beta^{\cap F}$ הוא בסיס) קיימים מספר סופי של איברים
$S_1,\cdots,S_n\in\beta$ כך ש $z\in\bigcap_{i=1}^{n}S_i\subset U$.
אף $S_1,\cdots,S_n$ לא שייך ל C (כי אחרת $C\cap\beta$ מכסה את z).
לכן ע"פ תכונת (*) הנ"ל לכל $1\le i\le n$ קיים תת אוסף סופי C_i כך ש $C_i\cup\{S_i\}$ מכסה את X.
נסמן: $G_i:=\cup\{A: A\in C_i\}$. אז $S_i\cup G_i=X$ ונקבל

$$U\cup(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\supseteq(\bigcap_{i=1}^{n}S_i)\cup(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\supseteq\bigcap_{i=1}^{n}(S_i\cup G_i)=X$$

ז"א תת אוסף סופי $\bigcup_{i=1}^{n}C_i\cup\{U\}$ של C מכסה את X. סתירה ! זה מוכיח את הקריטריון.

<u>בעזרתו נוכיח כיוון שני של משפט</u> Tychonoff

בתפקיד של פרה-בסיס β ב $X=\prod_{i\in I}X_i$ ניקח **תיבות אלמנטריות**.

$\alpha:=\{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i)\mid O_i\in\tau_i\}$ פרה-בסיס סטנדרטי. המקורות של קבוצות פתוחות מכל גורם X_i. נניח בשלילה ש X לא קומפקטי. אז לפי קריטריון Alexander קיים תת אוסף C של α כך ש C הוא **כיסוי בעייתי** (ללא תת כיסוי סופי) של X. נציג אותו $C=\bigcup_{i\in I}C_i$ כאשר כל C_i מורכב מתיבות אלמנטריות שבאות מגורם X_i. לפי ההנחה C_i לא מכיל תת כיסוי סופי של X. אזי $p_i(C_i)$ לא מכיל תת כיסוי סופי של X_i (אחרת, מקורות מתאימים כיסוי סופי של X).

אבל X_i קומפקטי ו- $p_i(C_i)$ אוסף של קבוצות **פתוחות**. לכן $p_i(C_i)$ הוא לא כיסוי של X_i קיימת נקודה $x_i\in X_i$ שלא מכוסת ע"י $p_i(C_i)$. אזי הנקודה $x:=(x_i)\in\prod_{i\in I}X_i$

לא מכוסה ע"י (כיסוי) C של X. סתירה! מכאן מש"ל. ☺

הערה: כיוון שני אפשר להוכיח בדרכים נוספות:

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות FIP (תכונת החיתוך הסופי)

דרך ג. ואולטרה-פילטרים (על-מסנן).
ראו: [קובץ](https://u.math.biu.ac.il/~megereli/TychonoffTheorem.pdf) https://u.math.biu.ac.il/~megereli/TychonoffTheorem.pdf
וגם *טופולוגיה קבוצתית*, האוניברסיטה הפתוחה (ד. לייבוביץ).

תוצאות:

- $[0,1]^S \in Comp$ קוביות Tychonoff (לכל קבוצה S)
- $[0,1]^{\mathbb{N}} \in Comp$ קוביות Hilbert

תרגיל: הוכיחו ש $f:[0,1]^{\mathbb{N}} \to l_2,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=((x_{1,},\frac{1}{2}x_2,\cdots,\frac{1}{n}x_n,\cdots)$
שיכון טופולוגי של קוביות הילברט לתוך מרחב הילברט. רמז: מ"ל רציפות (מדוע?)

- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots\in Comp$ קוביות Cantor

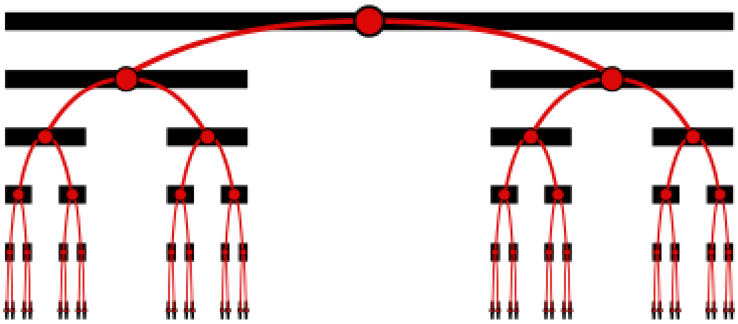
דוגמה חשובה (מרחב קנטור)

תזכורת: ידוע שקבוצת קנטור היא $\{c_i\in\{0,2\}\}$ $C:=\{c\in[0,1]: c=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{3^i}$.

$C_0=[0,1],\ C_n=\frac{1}{3}C_{n-1}\cup(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_{n-1})$ $C=\bigcap_n C_n$ חיתוך של קבוצות סגורות

משפט: קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots$.

הוכחה: שקול להוכיח $C\simeq\{0,2\}^{\mathbb{N}}$.



נגדיר פונקציה $f(x_1,x_2,\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}$ $\quad f:\{0,2\}^{\mathbb{N}}\to C$.

אזי f חח"ע (יחידות ההצגה הנ"ל). f גם פונקציה על (ברור).

$\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ קומפקטי לפי משפט Tychonoff.

לכן בגלל משפט על ההומיאומורפיזם מ"ל f רציפה בכל נקודה $a=(a_1,a_2,\cdots)\in\{0,2\}^{\mathbb{N}}$

מ"ל לכל $\varepsilon>0$ קיימת סביבה $O\in N(a)$ כך ש

$$x\in \mathrm{O}\Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

נבחר $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{2}{3^i}<\varepsilon$ ונגדיר **תיבה בסיסית**

$$O:=\{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\times\{a_{n_0}\}\times\{0,2\}\times\{0,2\}\times\cdots$$

אז ברור $O\in N(a)$ ולכל $x=(a_1,a_2,\cdots,a_{n_0},x_{n_0+1},x_{n_0+2},\cdots)\in O$ מתקיים:

$$|f(x)-f(a)|=|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}|=|\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{x_i-a_i}{3^i}|\le\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{2}{3^i}<\varepsilon$$

■

תרגיל: הוכיחו ש:

1. $C^2\simeq C, C^n\simeq C, C^{\mathbb{N}}\simeq C^{\mathbb{Z}}\simeq C$.
2. * C הומוגני.

מידע נוסף על קבוצת קנטור (Cantor set everywhere) :

- כל מרחב קומפקטי מטריזבילי הוא תמונה רציפה של קבוצת קנטור.
- למשל: $(x_i\in\{0,2\})$ $\quad f(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{2}\cdot\frac{1}{2^i}$ $\quad f:C\to[0,1]$ (מדוע היא לא חח"ע ?)

- כל מרחב מטרי קומפקטי מטריזבילי בעל מימד אפס ללא נקודות מבודדות הומיאומורפי עם קבוצת קנטור (למשל השלמת $(\mathbb{Z}, d_p)$).
- מרחב קנטור $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ חשוב גם באינפורמטיקה, תורת הקודים,
https://peerj.com/articles/cs-171.pdf
במערכות דינמיות סימבוליות ...
"shift homeomorphism" $\sigma:\{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma(x_i) = (x_{i+1})$
(תבדקו שיש מסלול צפוף לפעולת חבורה ציקלית $G = <\sigma> = \{\sigma^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ על $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$)

ראו גם: https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

מספר Lebesgue

הגדרה: נניח α, β כל אחד אוסף תתי קבוצות של קבוצה X. אומרים ש **β עידון של α** אם מתקיים $\forall B \in \beta\ \exists A \in \alpha: B \subseteq A$

נסמן: $\beta \prec \alpha$.

דוגמה טריוויאלית: אם $\beta \subseteq \alpha$ אז $\beta \prec \alpha$.

דוגמה: $\forall 0 < r_1 < r_2 \quad \{B_{r_1}(x) : x \in X\} \prec \{B_{r_2}(x) : x \in X\}$

הגדרה: נניח (X, d) מ"מ, α כיסוי של X. אומרים ש α הוא **δ-אחיד**

אם מתקיים $\{B_\delta(x) | x \in X\} \prec \alpha$

אומרים **כיסוי אחיד** (*uniform covering*) אם הוא δ-אחיד עבור $\delta > 0$ מסוים.

הגדרה: אומרים שהמספר $\delta > 0$ הוא **מספר לבג** ($Lebesgue$) של כיסוי α אם כל תת קבוצה B ב X בעלת קוטר קטן מ δ מוכל באחד מהאיברים של α.

(א"ז $diam\, B < \delta \Rightarrow \{B\} \prec \alpha$).

הערות:

1) אם $0 < \delta$ מספר לבג של α, אז כל δ_1 כך ש $0 < \delta_1 < \delta$ גם מספר לבג.

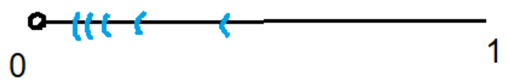
2) עבור $\alpha = \{B_\delta(x) | x \in X\}$, מספר לבג = δ.

3) **דוגמה:** כיסוי פתוח ללא מספר Lebesgue.

$$A_n := \left(\frac{1}{n+1}, 1\right] \qquad X = (0,1] \notin Comp$$

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \quad \alpha := \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

כיסוי פתוח של $(0,1]$. אבל אין מספר לבג עבור α.



אם נניח בשלילה שכן אז קיים $\delta > 0$ מספר לבג ל α,

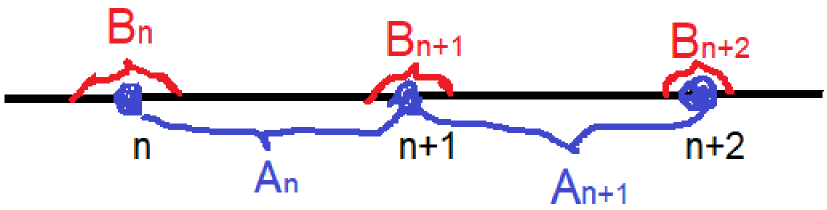
נגדיר $A := B_{\frac{2\delta}{5}}(\frac{1}{5}\delta) = (0, \frac{3}{5}\delta)$

אז $diam(A) = \frac{3}{5}\delta < \delta$

אבל A <u>לא מוכל באף איבר של</u> α.

תרגיל: במרחב $\mathbb{R}$ לכיסוי פתוח $\Omega = \{A_n = (n, n+1), B_n = (n - \frac{1}{|n|+1}, n + \frac{1}{|n|+1}) : n \in \mathbb{Z}\}$

אין מספר לבג.



<u>משפט</u>: (מספר *Lebesgue*) נניח (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. אז לכל כיסוי פתוח α יש מספר לבג.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקיים כיסוי פתוח α ללא מספר לבג.

אז לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה A_n כך ש

$diam(A_n) < \frac{1}{n}$ אבל A_n **<u>לא מוכל באף איבר של</u>** α.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר נקודה אחת $a_n \in A_n$.

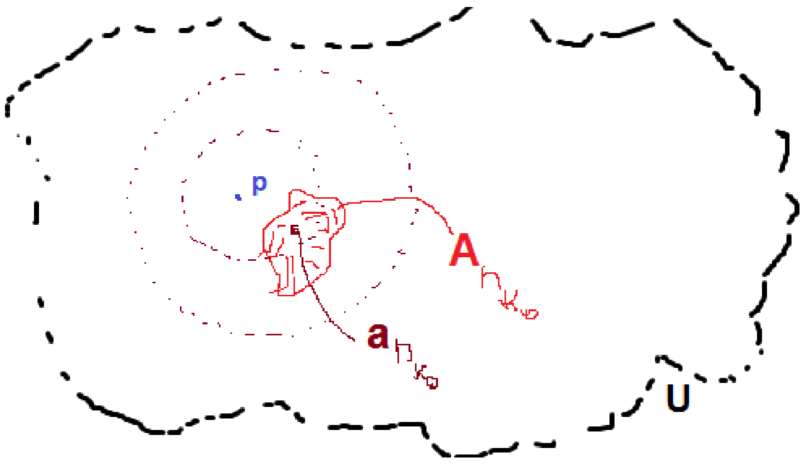
נתון ש X קומפקטי. הוא מטריזבילי לכן גם $X \in SComp$.

לכן קיימת תת סדרה מתכנסת $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ של הסדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. תהי $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = p$.

קיים $U \in \alpha$ כך ש $p \in U$ (כי α כיסוי)

קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(p) \subseteq U$ (כי U פתוח)

קיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $diam(A_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad d(p, a_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (התכנסות והבנייה)



$$.\forall x\in A_{n_{k_0}} \quad d(p,x)\le d(p,a_{n_{k_0}})+d(a_{n_{k_0}},x)<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}$$

נקבל $A_{n_{k_0}}\subseteq B_\varepsilon(p)$. אז גם $A_{n_{k_0}}\subseteq B_\varepsilon(p)\subseteq U\in\alpha$, סתירה עם הבנייה של $A_{n_{k_0}}$!

☺

<u>תוצאה:</u> אם מרחב מטרי הוא קומפקטי אז כל כיסוי פתוח שלו אחיד.

<u>הסבר</u>: נניח α כיסוי פתוח. קיים מספר לבג $\delta>0$. אז $\{B_{\frac{\delta}{3}}(x):x\in X\}\prec\alpha$.

<u>משפט</u>: נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים $f:X\to Y$ פונקציה רציפה. אם X קומפקטי אז $f:X\to Y$ רציפה במידה שווה.

<u>הוכחה</u>: נניח $\varepsilon>0$. ש"ל שקיים $\delta>0$ כך שמתקיים :

$$d(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow\rho(f(x_1),f(x_2))\le 2\varepsilon$$

נגדיר $\alpha:=\{f^{-1}(B_\varepsilon(y)):y\in Y\}$. אז α כיסוי פתוח של X (רציפות).

קיים מספר לבג $\delta>0$ עבור α (קומפקטיות של X ומשפט על מספר לבג).

נניח $d(x_1,x_2)<\delta$. אז $diam\{x_1,x_2\}<\delta$. לכן קיים $y\in Y$ כך ש

$$\{x_1,x_2\}\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(y))$$

אז $\{\mathrm{f}(x_1),\mathrm{f}(x_2)\}\subseteq ff^{-1}(B_\varepsilon(y))\subseteq B_\varepsilon(y)$.

לכן $\rho(f(x_1),f(x_2))\le diam(B_\varepsilon(y))\le 2\varepsilon$.

☺

מידע: ראו על "מרחבים אחידים" uniform spaces

הגדרה: מ"ט X הוא **קומפקטי מקומית** אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית.
שקול: לכל נקודה יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי. נסמן: $X \in LComp$.
דוגמאות: מרחב דיסקרטי, $\mathbb{R}^n$, כל תת קבוצה פתוחה במרחב קומפקטי T_2 ...

תרגיל: $\mathbb{Q} \notin LComp$.

הערה: "קומפקטיות מקומית" לא נשמרת ע"י מכפלה <u>אינסופית</u> (סופית – כן!). ראו תרגיל הבא

תרגיל: $\mathbb{R}^n \in LComp$ אבל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \notin LComp$.

הסבר: כל סביבה $V \in N(x)$ של כל נקודה $x = (x_1, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מכילה תיבה
בסיסית $U := U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
לכן הטלה $p_{m+1}(V) = p_{m+1}(\mathrm{U}) = \mathbb{R}$ עם תמונה רציפה $\mathbb{R}$ (שהיא לא קומפקטית) ...

הגדרה: פונקציה $f : X \to Y$ נקראת **קומפקטיפיקציה** (compactification) של X אם f שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y \in Comp \cap T_2$.

<u>דוגמאות:</u>

$f(n) = \frac{1}{n}$ $\quad f : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ("חד-נקודתית")

$i : (-1,1) \to [-1,1]$ ("דו-נקודתית")

$f(v) = \frac{v}{1+||v||}$ $\quad f : \mathbb{R}^n \to B_1[0]$

<u>תרגיל</u> * (יהיה בתירגול) -- **קומפקטיפיקציה חד-נקודתית** (Alexandroff)

נניח (X, τ) קומפקטי מקומית לא קומפקטי והאוסדורפי. תהי $p \notin X$ ("נקודת האינסוף"). בקבוצה $X^* = X \cup \{p\}$ נגדיר $\tau^* := \tau \cup \{X^* \setminus K : \ K \ is \ compact\}$.

הוכיחו:

1. $(X^*, \tau^*) \in Comp \cap T_2$.
2. פונקצית ההכלה $i : X \to X^*$ מגדירה שיכון טופולוגי צפוף.

<u>דוגמאות:</u>

- $X = \mathbb{R}^n$ אז $X^* \simeq S_n$ (הטלה סטראוגרפית)

- $X=(-\infty,1)\cup(5,7)$ אז $X^*\simeq 8$
- $X=\mathbb{N}$ אז $X^*\simeq\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$

תרגיל: לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי).

משפט: $LComp\cap T_2\subset T_{3.5}$

הוכחה: נניח $X\in LComp\cap T_2$. אם X קומפקטי אז הוא T_4 כי הוכחנו ש $Comp\cap T_2\subset T_4$. לכן גם $X\in T_{3.5}$. בה"כ $X\notin Comp$.

אז קיימת קומפקטיפיקציה $i:X\to X^*\in Comp\cap T_2$. ברור $X^*\in T_4$ (כי $Comp\cap T_2\subset T_4$). מצד שני $T_4\subset T_{3.5}$ (כי $T_4=T_4^{func}$ לפי משפט Urysohn. לכן $X^*\in T_{3.5}$. כעת נשתמש בעובדה ש $T_{3.5}$ תכונה תורשתית. לכן גם $X\in T_{3.5}$.

☺

תזכורת: $T_0,T_1,T_2,T_3,T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

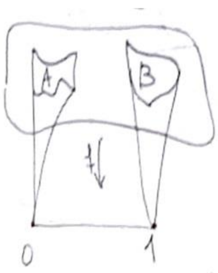
משפט: $Metriz\subset T_4$.

הוכחה: $(X,\tau)\in Metriz\Rightarrow\exists d:\tau=top(d)$

מ"ל:

א. $X\in T_1$.
ב. לכל A,B סגורות יש הפרדה פונקציונלית (הפרדה פונקציונלית גוררת הפרדה סביבתית)

א) ברור $Metriz\subset T_2$.



ב)נגדיר $f:X\to[0,1]$ ע"י: $f(x)=\frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)}$

כאשר – $f_A(x)=d(x,A)\,,f_B(x)=d(x,B)$

- $0\le f(x)\le 1$
- מוגדר היטב: המכנה $\neq 0$ לכל x כי – $f_A(x)\ge 0,f_B(x)\ge 0$
  לכן המכנה $=0$ אם ורק אם –

$$\begin{cases}f_A(x)=0\\ f_B(x)=0\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}d(x,A)=0\\ d(x,B)=0\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \in \bar{A} \overset{\text{נתון סגור}}{=} A \\ x \in \bar{B} \underbrace{=}_{\text{נתון סגור}} B \end{cases}$$

לכן $x \in A \cap B$. מצד שני, $A \cap B = \emptyset$ (נתון). סתירה!

- נשים לב כי –

$$\frac{f_1}{f_2} = f \in C(X,[0,1])$$

f רציפה. זה קורה כי $f_1, f_2 \in C(X)$ וכן $f_2 \neq 0$ תמיד.

- $\forall a \in A: \quad f(a) = \frac{0}{-} = 0$.
- $\forall b \in B: \quad \frac{d(b,A)}{d(b,A)+0} = f(b) = 1$.

מצאנו הפרדה פונקציונלית!

☺

מידע: קיימים $X \in T_{3.5} \setminus T_4$, למשל $X \coloneqq \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$.

Urysohn's Small Lemma (USL)

נניח $X \in T_4$ אז

(*) לכל סביבה פתוחה O של קבוצה סגורה A קיימת סביבה פתוחה U של A כך ש $A \subset U \subset \overline{U} \subset O$.

<u>הסבר</u>: $X \in T_4$ לכן עבור קבוצות סגורות זרות $A, B \coloneqq X \setminus O$ קיימות סביבות פתוחות זרות $U \in N(A) \cap \tau, V \in N(B) \cap \tau$

אז נקבל $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus V \subset X \setminus B = O$.

הערה: בעצם (*) שקול לתנאי ב של אקסיומת T_4

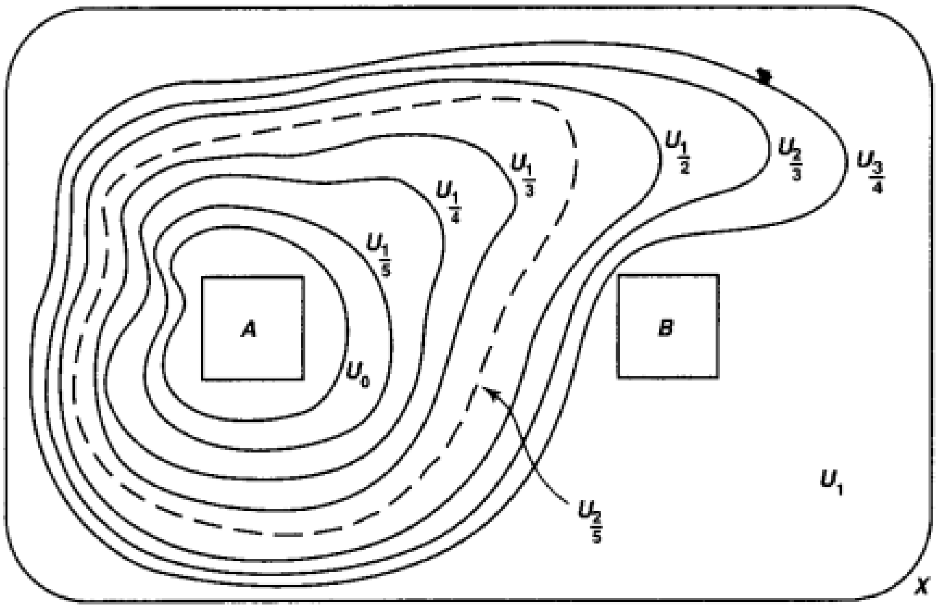
<u>משפט (למה של Urysohn)</u>: $T_4 = T_4^{func}$.

נניח $X \in T_4$. אז לכל קבוצות סגורות זרות A, B יש הפרדה פונקציונלית במובן Urysohn (פונקציה רציפה $\text{f}(A) = 0, \text{f}(B) = 1$ $\quad f : X \to [0,1]$)

<u>הוכחה</u>: רעיון להוכחה – "Onion Argument"

בהנחה שיש פונקציה כזאת אז יש אוסף $\{U_t : t\in[0,1]\}$ סביבות פתוחות של A כך ש

$0<s<t<1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$ (ניקח למשל: $U_t := f^{-1}[0,t)$. שימו לב: $\overline{[0,s)} \subseteq [0,t)$)



בהוכחה הבאה עוברים תהליך הפוך – מבניית מאוסף דומה לבניית פונקציה.

תחילת התהליך: נגדיר $U_1 = X$. בגלל (USL) עבור $A\subset B^c$ קיימת קבוצה פתוחה $U_{\frac{1}{2}}$

כך ש $$A\subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset X\setminus B$$

שוב בגלל (USL) קיימות קבוצות פתוחות $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}}$ כך ש

$$A\subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset X\setminus B$$

בשלב הבא נמצא סביבות פתוחות עם אינדקסים $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}=\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}=\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}=\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}=1$

כאשר סביבות עם האינדקסים $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}, \frac{4}{8}=\frac{1}{2}, \frac{6}{8}=\frac{3}{4}, \frac{8}{8}=1$ כבר הגדרנו !

נמשיך כך באינדוקציה. אז נקבל אוסף קבוצות פתוחות

$$\{U_t : t\in D\} \quad 0<s<t<1 \Rightarrow \overline{U_s}\subseteq U_t$$

שימו לב קבוצת רציונליים דיאדיים $D := \{\frac{m}{2^n}, m,n\in\mathbb{N}, m\le 2^n\}$ **<u>צפופה</u>** ב $[0,1]$.

נגדיר פונקציה $$f(x) := \inf\{t\in D : x\in U_t\}$$

- $0\le f(x)\le 1 \quad f(a)=0\ \forall a\in A \quad f(b)=1\ \forall b\in B$

  כי $0\in \overline{D}=[0,1] \quad \forall t\in D\ \ A\subseteq U_t \subseteq X\setminus B\subseteq X = U_1$.
- $f: X\to[0,1]$ רציפה (**<u>נדלג על הבדיקה</u>**)

לפי תכונת פרא-בסיס (ב $[0,1]$) מ"ל $f^{-1}[0,a),\ f^{-1}(a,1]$ פתוחות ב X.

א. לפי ההגדרה $f^{-1}[0,a)=\{x\in X : f(x)<a\}$.

קבוצה D צפופה ב $[0,1]$. לכן נקבל ש $f^{-1}[0,a)=\bigcup_{t<a}U_t$ והיא פתוחה לפי (t_3).

ב. ש"ל $X\setminus f^{-1}(a,1]$ סגור.

קודם נעיר $X\setminus f^{-1}(a,1]=\{x\in X : f(x)\le a\}$.

עכשיו מ"ל $\{x\in X : f(x)\le a\}=\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$ (ואז חיתוך קבוצות סגורות שימוש ב $(t_3{}^c)$)

$(\subseteq)$

נניח $y\in\{x\in X : f(x)\le a\}$. נבחר דיאדי $s\in D$ כך ש $a<s<1$ (צפיפות D !)

אז לכל $a<t<s$ נקבל $\overline{U_t}\subseteq U_s$.

מצד שני בגלל $f(y)\le a<t$ מתקיים $y\in U_t\subseteq\overline{U_t}$. לכן $y\in\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$.

$(\supseteq)$

נניח $y\in\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$. נבחר ε כך ש $0<\varepsilon<1-a$.

בגלל הצפיפות של D נבחר:

$t\in D$ כך ש $a<t<a+\varepsilon<1$

וגם $s\in D$ כך ש $t<s<a+\varepsilon$.

ברור שאז $\overline{U_t}\subseteq U_s$. לכן $y\in U_s$. מכאן $f(y)\le s<a+\varepsilon$.

קיבלנו $f(y)<a+\varepsilon\quad \forall 0<\varepsilon<1-a$.

ז"א $f(y)\le a$.

☺

משפט: (Tietze-Urysohn extension thm)

נניח $X\in T_1$. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $X\in T_4$.

2. לכל תת קבוצה סגורה $A\subset X$ ולכל פונקציה רציפה $f:A\to[0,1]$ קיימת הרחבה רציפה $F:X\to[0,1]$.

__נוכיח__ רק $(1)\to(2)$:

נניח C,B קבוצות סגורות זרות לא ריקות. נגדיר קבוצה $A:=C\cup B$. אז היא סגורה. ונגדיר פונקציה $f(A)=0, f(B)=1 \quad f:A\to[0,1]$. אז היא רציפה

(שימו לב: $A:=C\cup B$ פירוק טופולוגי).

לפי (2) קיימת הרחבה רציפה $F : X \to [0,1]$.

אז לפי הבנייה היא מפרידה פונקציונלית C, B.

<u>משפט:</u> (Square-filling curves)

קיימת פונקציה רציפה <u>על</u> $F : [0,1] \to [0,1]^2$.

<u>הוכחה:</u>

קיים הומיאומורפיזם $h : C \to C^2$ וקיימת פונקציה רציפה ועל $\varphi : C \to [0,1]$

למשל: $(x_i \in \{0,2\})$ $f(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2} \cdot \frac{1}{2^i}$ $f : C \to [0,1]$ (מדוע היא לא חח"ע ?)

זה צמצום של פונקציית Cantor על קבוצת Cantor.

אז יש גם פונקציה רציפה ועל $f = (\varphi \times \varphi) \circ h : C \to [0,1] \times [0,1]$.

כעת נשתמש במשפט ההרחבה ונקבל פונקציה רציפה ועל $F : [0,1] \to [0,1]^2$.

☺

<u>הגדרה</u>: נניח $S = \{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש S :

א. <u>מפריד נקודות</u> אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב X קיים $f_{i_0} : X \to Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$

ב. <u>מפריד נקודות וקבוצות סגורות</u> אם לכל $x \in X$ וקבוצה סגורה $K \not\ni x$ ב X

קיים $f_{i_0} : X \to Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(K)}$.

<u>משפט</u> (שני על פונקציית האלכסון):

1. נניח $S = \{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות רציפות ונתבונן בפונקציית האלכסון

$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$ $\quad f = \Delta_{i \in I} f_i : X \to Y = (\prod_{i \in I} Y_i, \tau_{\Pi})$.

א. אם S מפריד נקודות אז f רציפה חח"ע.

ב. אם S מפריד נקודות וקבוצות סגורות, $X \in T_1$ אז f שיכון טופולוגי.

<u>הוכחה:</u> א. לפי **משפט ראשון על האלכסון** f רציפה ומתקיים $f_i = p_i \circ f$ $\quad \forall i \in I$.

לכן אם $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$ אז $f(x_1) = (f_i(x_1))_{i \in I} \neq f(x_2) = (f_i(x_2))_{i \in I}$.

ב. $X \in T_1$ לכן לפי שלב (א) האוסף S מפריד נקודות ופונקצית אלכסון היא חח"ע.

מ"ל שפונקציה (חח"ע+על+רציפה) "מצומצמת בטווח" $f: X \to f(X)$ סגורה.

מ"ל $f(K) = f(X) \cap \overline{f(K)}$ לכל K סגור ב X.

מ"ל $f(K) \supseteq f(X) \cap \overline{f(K)}$ (הכלה $\subseteq$ ברורה).

נניח $y \in f(X) \cap \overline{f(K)}$. צ"ל $y \in f(K)$.

נקבל $y = f(x) \in \overline{f(K)}$ $\quad \exists x \in X$.

אז בגלל השוויונים $f_i = p_i \circ f$ $\forall i \in I$ רציפות ההטלות נקבל

$$\forall i \in I \quad f_i(x) = \mathrm{p}_i(f(x)) \in \mathrm{p}_i\, \overline{f(K)} \subset \overline{\mathrm{p}_i\, f(K)} = \overline{f_i(K)}$$

זאת אומרת S לא מפריד נקודה x וקבוצה סגורה K. אז בהכרח $x \in K$.

זה מוכיח $y = f(x) \in f(K)$.

☺

<u>משפט</u>: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in Comp \cap T_2$).
2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית Tychonoff $[0,1]^S$.

<u>הוכחה</u>: 2 $\Leftarrow$ 1 $[0,1]^S \in Comp$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית. T_2 תכונה כפלית ותורשתית. לכן $X \in Comp \cap T_2$.

1 $\Leftarrow$ 2 נניח $X \in Comp \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $\mathrm{f}: X \to [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט *Urysohn* $T_4 = T_4^{func}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a, b \in X$ נבחר בפונקציה רציפה
$f_{a,b}: X \to [0,1], \mathrm{f(a)} = 0, \mathrm{f(b)} = 1$.

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $\mathrm{S} := \{f_s = f_{a,b} \mid a \neq b\}$ (ז"א $\mathrm{s} = (a, \mathrm{b}), a \neq b$)

משרה פונקצית האלכסון $f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$ $\quad f: X \to [0,1]^S$.

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.

לפי **משפט השיכון** נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).

☺

הרצאה 13

תרגיל*: (*האוניברסליות של קבוצת* Cantor) התנאים הבאים שקולים:

א. מ"ט X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קבוצת קנטור C.

ב. X קומפקטי, מטריזבילי ו $\dim X = 0$.

משפט (*האוניברסליות של קוביות* Tychonoff)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_{3.5}$

2. X משוכן לתוך קובית Tychonoff מסוימת $[0,1]^S$.

3. ל X יש קומפקטיפיקציה.

הוכחה:

1 $\Leftarrow$ 2 לכן קיים $X \in T_{3.5}$ אוסף פונקציות $\{f_s : X \to [0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות (למשל $S := C(X,[0,1])$). אז פונקצית האלכסון $f = \Delta_{s\in S} f_s : X \to [0,1]^S$ שיכון טופולוגי לפי המשפט על פונקצית האלכסון.

2 $\Leftarrow$ 3 אם $f : X \to [0,1]^S$ שיכון טופולוגי אז הוא משרה קומפקטיפיקציה

$$f : X \to Y := \overline{f(X)} \subseteq [0,1]^S$$

לפי משפט Tychonoff $[0,1]^S \in Comp$. האוסדופיות תכונה כפלית. לכן $[0,1]^S \in Comp \cap T_2$. אז גם $Y \in Comp \cap T_2$.

3 $\Leftarrow$ 1 נזכיר ש $Y \in Comp \cap T_2 \subset T_4 \subset T_{3.5}$ ו $T_{3.5}$ תכונה תורשתית.

☺

משפט (מטריזציה)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in Metriz \cap B_2$ (שקול: $X \in Metriz \cap Sep$).

2. X משוכן לתוך קובית Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

הוכחה: (נדלג על ההוכחה)

1 $\Leftarrow$ 2 בגלל המשפט הקודם מ"ל שקיים אוסף בן מניה $\{f_s : X \to [0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נתון $X \in Metriz \cap B_2$. קיים בסיס בן מניה $\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

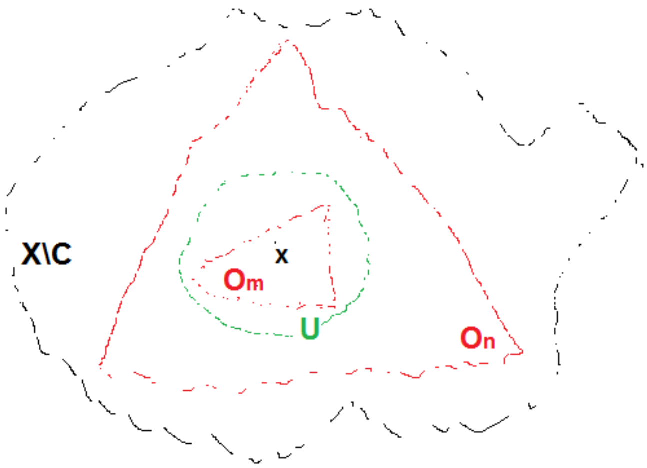
לכל זוג O_n, O_m עם התנאי $\overline{O_m} \subseteq O_n$ נבחר פונקציה רציפה אחת $f_{m,n} : X \to [0,1]$ כך ש
$f_{m,n}(\overline{O_m}) = 0,\ f_{m,n}(X \setminus O_n) = 1$ (זה אפשרי כי $Metriz \subseteq T_4 = T_4^{func}$)

אז אוסף S של פונקציות שנבחרו הוא בן מניה.

בגלל המשפט "פונקצית האלכסון" מ"ל ש S מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נניח $x \notin C$ ו C סגורה. $\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לטופולוגיה לכן אפשר לבחור

סביבה פתוחה $\gamma \ni O_n$ כך ש $x \in O_n \subset X \setminus C$.



במרחב מטריזבילי X קיימת סביבה $U \in N(x)$ כך ש $\overline{U} \subseteq O_n$

(למשל כדור $x \in U = B(x,\varepsilon) \subset \overline{B(x,\varepsilon)} \subset B[x,\varepsilon] \subset O_n$).

$\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לכן קיים $O_m \in \gamma$ כך ש $x \in O_m \subseteq U$. נקבל

$$x \in O_m \subseteq \overline{O_m} \subseteq \overline{U} \subseteq O_n \subseteq X \setminus C$$

אז פונקצית אוריסון $f_{m,n} : X \to [0,1]$ מפרידה x, C (כי היא מפרידה $\overline{O_m}, X \setminus O_n$)

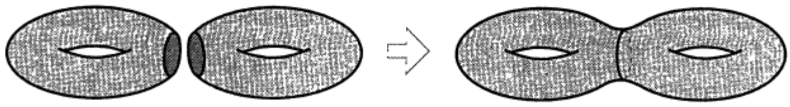
2 $\Leftarrow$ 1 $[0,1]^{\mathbb{N}} \in Metriz \cap B_2$ וכן גם כל תת מרחב שלו (כי $Metriz, B_2$ תכונות תורשתיות).

☺

<u>מידע</u>: אפשר להוכיח משפט Urysohn $T_3 \cap B_2 \subset Metriz$ (ראו למשל: J.R. Munkres Topology).

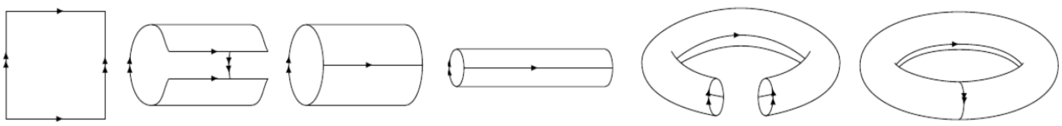
לכן במשפט הקודם התנאי הראשון ניתן להחליש ל $X \in T_3 \cap B_2$.

טופולוגית מנה -- Quotient topology



למדנו מספר אפשרויות לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים בעזרת נתונים. בין היתר: תת מרחב, מכפלה, סכום. אפשרות נוספת וגם מאוד חשובה היא "מנה טופולוגית".

למשל אפשר לקבל טורוס 2-ממדי כמרחב מנה של ריבוע באופן הבא:



This image from http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png.

נניח (X,τ) מ"ט ואנחנו רוצים "להדביק" חלקים מסוימים.

איך מגדירים טופולוגיה מתאימה ? מה הן ההגדרות המתאימות ?

<u>תזכורת</u> (מתורת הקבוצות) נניח $\sim$ יחס שקילות בקבוצה X. נסמן:

- $[a]:=\{x\in X \mid a\sim x\}$ מחלקה של איבר a
  (תמיד $a\in[a]$ ויש חלוקה $X=\coprod_{a\in X}[a]$)
- $X/\sim \;:=\{[a]: a\in X\}$ "קבוצת המנה" היא קבוצת המחלקות
- $a\mapsto[a]$ $\rho: X\to X/\sim$ "פונקציה (העתקה) טבעית" (תמיד **על**)

<u>שאלה</u>: איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב $X/\sim$ כאשר X מרחב טופולוגי ?

<u>שקול</u>: נתונה פונקציה <u>על</u> $q:X\to Y$. איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב Y ?

שימו לב: אם נגדיר $a\sim b \Leftrightarrow q(a)=q(b)$ אז נקבל יחס שקילות כך ש Y וקבוצת מנה $X/\sim$ הם באותו תפקיד.

רעיון: להגדיר טופולוגיה σ ב Y כטופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q:X\to Y$.

<u>הגדרה</u>: נניח (X,τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $q:X\to Y$. אומרים ש σ **טופולוגית המנה** (ביחס לפונקציה $q:(X,\tau)\to Y$) אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ רציפה.

ב. אם $q:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ רציפה אז $\gamma\subseteq\sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ היא **פונקצית מנה** (או **העתקת מנה**).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

<u>תאור של טופולוגית המנה</u>: $\sigma:=\{O\subseteq Y\mid \quad q^{-1}(O)\in\tau\}$

ז"א קבוצה ב Y פתוחה אם (ורק אם) המקור פתוח ב X.

שקול: קבוצה ב Y סגורה אם (ורק אם) המקור סגור ב X (מדוע ?)

תרגיל: כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה.

תרגיל: הרכבה של פונקציות מנה היא גם מנה.

משפט (טופולוגיה חזקה)

נניח $q:X\to Y$ פונקצית מנה ונתונה פונקציה $f:Y\to Z$.

אז פונקציה f רציפה אם (ורק אם) ההרכבה $f\circ q:X\to Z$ רציפה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f\circ q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: נניח $f\circ q:X\to Z$ רציפה. צ"ל $f:Y\to Z$ רציפה.

ש"ל $f^{-1}(O)$ פתוחה ב Y לכל O פתוחה ב Z.

נתון ש $q:X\to Y$ מנה. לכן ש"ל $q^{-1}(f^{-1}(O))$ פתוחה ב X. אבל

$q^{-1}(f^{-1}(O))=(f\circ q)^{-1}(O)$ ונתונה רציפות של $f\circ q:X\to Z$.

☺

תוצאה: נניח $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ פונקצית מנה. אז טופולוגית מנה σ ב Y היא טופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q:X\to Y$.

ז"א אם $q:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ רציפה אז $\gamma\subseteq\sigma$.

הסבר: נשתמש במשפט "טופולוגיה חזקה" כאשר בתפקיד $f:Y\to Z$ ניקח $id:(Y,\sigma)\to(Y,\gamma)$.

משפט: (תנאי מספיק: פתיחות, סגירות)

אם פונקציה $q:X\to Y$ על, רציפה, פתוחה (או וסגורה)

אז $q:X\to Y$ היא פונקצית מנה.

הוכחה: נניח $q^{-1}(O)$ **פתוחה** ב X עבור $O\subseteq Y$. צ"ל O פתוחה ב Y.

לפי הנתון הפונקציה היא פתוחה לכן התמונה $q(q^{-1}(O))$ היא גם פתוחה.

אבל q **על** לכן $q(q^{-1}(O))=O$ חייבת להיות פתוחה. הוכחה דומה אם יש סגירות ...

☺

תוצאה: כל הטלה $X_{i_0}\to \prod_{i\in I}X_i:p_{i_0}$ היא פונקצית מנה (פתיחות).

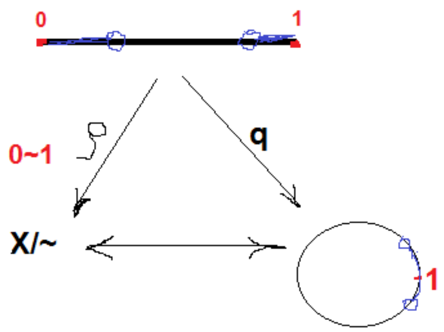
תוצאה: נניח $f:X\to Y$ רציפה, על $X\in Comp, Y\in T_2$. אז f פונקצית מנה (סגירות).

דוגמה: $f:X=[0,1]\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\|z\|=1\}\quad f(x)=cis(2\pi x)$

היא פונקצית מנה (הפונקציה היא על רציפה **וסגורה**).

הערה: אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X\to X/\sim\,\cong Y,\quad 0\sim 1$$



דוגמה: $id:(\mathbb{R},\tau_{discr})\to\mathbb{R}$ רציפה על אבל **לא פונקצית מנה**.

הסבר: המקור $id^{-1}(\{5\})=\{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R},\tau_{discr})$ אבל לא ב $\mathbb{R}$.

דוגמה: פונקציה רציפה $\mathrm{id}:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1=\tau_2$.

דוגמה: $h(x)=\mathrm{cis}(2\pi x)$ $\quad h:X=[0,1)\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\|z\|=1\}$

הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $A:=\{z\in T\,|\,0\le\arg(z)<\frac{\pi}{2}\}$ המקור $h^{-1}(A)=[0,\frac{1}{4})$ פתוח ב $[0,1)$ אבל A לא פתוח ב T.

דוגמה: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות $a\sim b\Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Q}$. אז מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim=\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ הוא בעל טופולוגיה טריוויאלית (מה העוצמה של $\mathbb{R}/\sim$?)

הסבר: מחלקות שקילות הן מהצורה $[a]=a+\mathbb{Q}$. צפוף ולא סגור ב $\mathbb{R}$.

לכל מקור $q^{-1}(C)$ של תת קבוצה לא ריקה C ב $\mathbb{R}/\sim$ לגבי פונקציה טבעית
$q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$

הקבוצה $q^{-1}(C)$ היא צפופה ב $\mathbb{R}$ (כי $q^{-1}(C)$ מכיל לפחות מחלקה אחת).

לכן האפשרות היחידה ש $q^{-1}(C)$ סגור היא $q^{-1}(C)=\mathbb{R}$. אבל אז $C=qq^{-1}(C)=q(\mathbb{R})=\mathbb{R}/\sim$ (קחו בחשבון ש $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$ על). לכן ב $\mathbb{R}/\sim=\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ עם טופולוגית מנה σ יש רק קבוצה אחת סגורה לא ריקה (שהיא $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$).

שקול: σ טופולוגיה טריוויאלית.

משפט: (**הומיאומורפיזם ומנה**)

נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה, על + חח"ע. אז f מנה אם ורק אם f הומיאומורפיזם.

הוכחה: כיוון אחד ברור (כי כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה).

בכיוון השני נניח $f:X\to Y$ מנה וחח"ע. צ"ל f הומיאומורפיזם. מ"ל f פתוח.

לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ מתקיים תמיד $U\subseteq f^{-1}(f(U))$. אצלנו בעצם $U=f^{-1}(f(U))$ (בגלל f חח"ע).

לפי הגדרת טופולוגית מנה קבוצה $O:=f(U)$ היא חייבת להיות פתוחה ב Y.

הוכחנו ש f פתוח.

☺

משפט (תנאי מספיק "צמצום")

נניח $f_1 : X \to Y$ $f_2 : Y \to Z$ פונקציות רציפות.

אם ההרכבה $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$ היא פונקצית מנה אז גם $f_2 : Y \to Z$ פונקצית מנה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_2 \circ f_1"'] & Y \arrow[d, "f_2"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: צ"ל $f_2 : Y \to Z$ מנה. נניח $f_2^{-1}(A)$ פתוח ב Y. לפי הרציפות של $f_1 : X \to Y$ נקבל ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A))$ פתוח ב X. ברור $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(A)$. אבל נתון ש $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$ פונקצית מנה. לכן A פתוחה.

☺

תוצאה: נניח $f : Y \to Z$ רציפה על וקיימת תת קבוצה $X \subseteq Y$ כך שצמצום $f_X : X \to Z$ הוא על ופונקצית מנה. אז גם $f : Y \to Z$ מנה.

הסבר: נפעיל משפט תנאי מספיק "צמצום" באופן הבא כאשר $i : X \to Y$ שיכון טבעי

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f_X"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

☺

הגדרה: נניח $f : X \to Y$ ונתון יחס שקילות $\sim$ ב X (או נתונה חלוקה של X).

אומרים שפונקציה $f : X \to Y$

א. **מכבדת** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$.

ב. **מגדירה** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

תכונות:

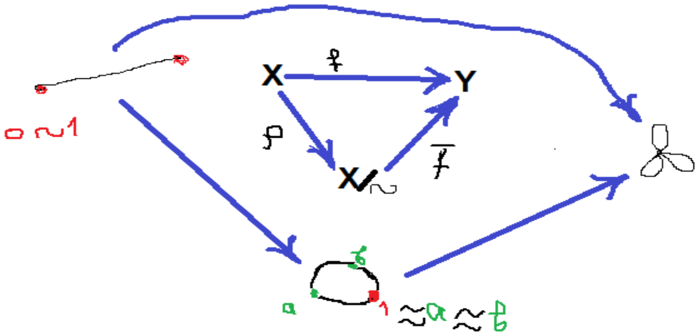
1. $f : X \to Y$ **מכבדת** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על הבאה

$\overline{f}([x]) = \overline{f}(\rho(x)) = f(x) \qquad \overline{f} : X/\sim \;\to Y \qquad$ (ז"א $f = \overline{f} \circ \rho$)

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & Y \\
 & X/\sim \arrow[u, "\overline{f}"']
\end{tikzcd}
$$

הערה: פירוש אינטואיטיבי -- יתכן ו $f : X \to Y$ מדביקה יותר נקודות מיחס שקילות $\sim$

למשל



מוסכמה: בהמשך על $X/\sim$ ניקח טופולוגית מנה (אם לא נאמר אחרת).

2. $f : X \to Y$ רציפה אם ורק אם $\overline{f} : X/\sim \;\to Y$ רציפה.

הסבר: נפעיל משפט "טופולוגיה חזקה" עבור הדיאגרמה הבאה

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\overline{f}"] \\
 & Y
\end{tikzcd}
$$

אם $f : X \to Y$ רציפה אז גם $\overline{f} : X/\sim \;\to Y$.

3. $f : X \to Y$ מנה אם ורק אם $\overline{f} : X/\sim \;\to Y$ מנה

הסבר: נפעיל משפט "צמצום" עבור הדיאגרמה הבאה

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\overline{f}"] \\
 & Y
\end{tikzcd}
$$

אם $f : X \to Y$ מנה אז גם $\overline{f} : X/\sim \;\to Y$.

4. $f:X\to Y$ **מגדירה** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על $\bar{f}:X/\sim\ \to Y$ והיא חח"ע.

משפט (קריטריון למנה)

נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה על. נסמן ב $X/\sim_f$ מרחב מנה כאשר $\sim_f$ הוא היחס שמוגדר ע"י $f:X\to Y$ (ז"א $a\sim_f b \Leftrightarrow f(a)=f(b)$).

התנאים הבאים שקולים:

א. $f:X\to Y$ מנה.

ב. פונקציה מושרית $\bar{f}:X/\sim_f\ \to Y$ היא הומיאומורפיזם

הוכחה:

ב $\Leftarrow$ א

$f=\bar{f}\circ\rho$ הרכבה של שתי פונקציות מנה. כי $\rho:X\to X/\sim_f$ פונקצית מנה (בחרנו $X/\sim_f$ בטופולוגית מנה) ו $\bar{f}$ הומיאומורפיזם.

א $\Leftarrow$ ב

נתון $f:X\to Y$ מנה. לפי תכונה 3 נקבל $\bar{f}:X/\sim_f\ \to Y$ גם מנה.

אבל $\bar{f}:X/\sim_f\ \to Y$ (על ו) חח"ע לפי תכונה 4.

לכן לפי משפט "**הומיאומורפיזם ומנה**" נקבל ש $\bar{f}:X/\sim_f\ \to Y$ הומיאומורפיזם.

☺

הערה חשובה: תכונות הנ"ל עוזרות להוכיח הומיאומופיזם עם מרחבי מנה מסוימים.

דוגמה: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

הסבר: נגדיר פונקציה

$$f:X=[0,1]\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\mid \|z\|=1\}\quad f(x)=(\cos(2\pi x),\sin(2\pi x))$$

הפונקציה היא מנה (כפונקציה רציפה סגורה על מרחב האוסדורף).

$f:X\to T$ מגדירה את היחס $0\sim1$.

לפי משפט קריטריון קיים הומיאומורפיזם $\bar{f}:[0,1]/\sim_f\ \to T$.

לכן $[0,1]/\sim_f \;\cong T$.

תרגיל: הוכיחו:

א. $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פונקצית מנה.

ב. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong T$

(כאשר $\mathbb{R}/\mathbb{Z}=\{x+\mathbb{Z}\mid x\in\mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

הסבר של א

דרך 1) אפשר להשתמש בתוצאת משפט צמצום עבור ההכלה $\mathrm{i}:[0,1]\to\mathbb{R}$.

דרך 2) אפשר להוכיח שבעצם $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פתוחה.

הסבר של ב

כאן אפשר להשתמש בחלק א יחד עם משפט קריטריון למנ אם ניקח בחשבון שיחס שקילות

$\sim_f$ כאן בדיוק נותן יחס הבא $a\sim_f b\Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a\equiv b \bmod \mathbb{Z}$.

הערה: מחלקת שקילות של $a\in\mathbb{R}$ הוא $[a]=a+\mathbb{Z}$.

ז"א תאור אחר של היחס הוא $\forall n\in\mathbb{Z}\quad a\sim_f a+n$.

תרגיל: (הצגת טורוס דו-ממדי) הוכיחו $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\cong T^2$

($\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2=\{(x,y)+\mathbb{Z}^2\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

פתרון: נתחיל מהפונקציה $f(\mathrm{x},\mathrm{y})=(cis2\pi x, cis2\pi y)\quad f:\mathbb{R}^2\to T^2$.

צמצום הפונקציה $f:[0,1]^2\to T^2$ פונקצית מנה. לכן לפי **משפט** (תנאי מספיק "צמצום") גם $f:\mathbb{R}^2\to T^2$ מנה.

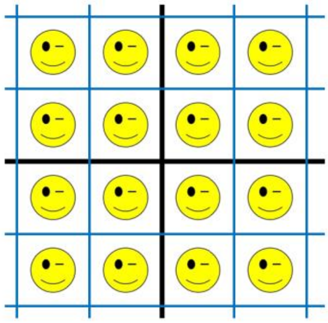
כעת לפי **משפט** (קריטריון למנה) נקבל $\mathbb{R}^2/\sim_f\cong T^2$.

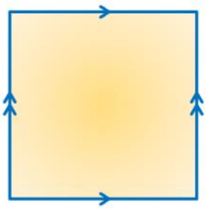
כאן יחס שקילות מתאימה היא $\forall n,m\in\mathbb{Z}\quad (a,b)\sim_f(a+n,b+m)$ המחלקות

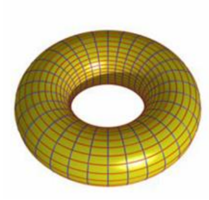
הן $\{(x,y)+\mathbb{Z}^2\mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. לכן קבוצת מנה מתאימה היא בדיוק $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

לכן מרחב מנה $\mathbb{R}^2/\sim_f$ כאן הוא בעצם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\cong T^2$.

כבר הוכחנו הומאומורפיזם $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$. לכן גם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.







מידע: מי שלמד תורת החבורות בהחלט מבין שקבוצת מנה $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ היא חבורת מנה. בשפה יותר מתמטית כאן מדובר על איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$

תרגיל:במעגל יחידה $T=\{z\in\mathbb{C}: \|z\|=1\}$ במישור המרוכב נגדיריחס שקילות $v\sim -v$.
הוכיחו שמרחב מנה $T/\sim$ הוא הומיאומורפי למעגל עצמו T.

פתרון: $\mathrm{f}:\mathrm{T}\to\mathrm{T}, \mathrm{f(v)}=\mathrm{v}^2$ היא פונקצית מנה (מדוע ?).

היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $v\sim -v$.

מידע: כאן בעצם אנחנו מחשבים "מרחב המסלולים" (אורביטות) לגבי פעולה טבעית

חבורה ציקלית $\mathbb{Z}_2=\{\mathrm{e},\sigma\}$ עם שני איברים על המעגל T (הפעולה היא היפוך הסימן)

$$\mathbb{Z}_2\times T\to T \quad (\sigma,v)\mapsto\sigma(v)=-v$$

אזהרות:

1. להיות פונקצית מנה לא תורשתית. ז"א יתכן ש $\mathrm{f}:X\to Y$ העתקת מנה $\mathrm{A}\subseteq X$.
ופונקצית על שמושרית $\mathrm{f}_A:\mathrm{A}\to f(\mathrm{A})$ היא לא תמיד מנה.

למשל להתבונן בדוגמאות שהיו עם $A=[0,1)\subset X=[0,1]$.

דוגמה נוספת: $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ מנה אבל הצמצום

$p_1: X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}\cup\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ לא מנה

כי המקור של $\{0\}$ הוא נקודון $\{(0,0)\}$ שהיא נקודה מבודדת ב X

אבל $\{0\}$ לא פתוח ב $\mathbb{R}$.

2. מרחב מנה יכול להיות מאוד מסובך ("הרבה יותר מהמקור"). למשל:

א. ריבוע דו-ממדי הוא מרחב מנה של קטע (Square-filling curves).

ב. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב מנה של קבוצת קנטור !

3. פונקצית מנה יכולה להיות לא פתוחה ולא סגורה.

דוגמה א: נניח $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \quad x\geq 0 \vee y=0\}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

נגדיר פונקציה $f(x,y)=x$ $f:X\to\mathbb{R}$ (צמצום של הטלה).

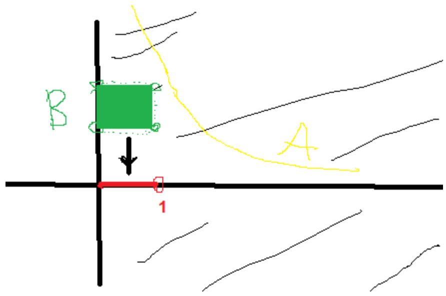
אז f פונקצית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.

פתרון: צמצום על ציר X מגדיר הומיאומופיזם (בעצם הפונקציה המקורית היא רטרקציה).

לכן $f:X\to\mathbb{R}$ מנה לפי משפט הצמצום.

f לא פתוחה: $\mathrm{B}:=[0,1)\times(2,3)$ פתוחה ב X. אבל $\mathrm{f(B)}=[0,1)$ לא פתוחה ב $\mathbb{R}$.

f לא סגורה: $\mathrm{A}:=\{(x,\frac{1}{x}):x>0\}$ סגורה ב X. אבל $\mathrm{f(A)}=(0,\infty)$ לא סגורה ב $\mathbb{R}$.



דוגמה ב: עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 1\leq x\end{cases}$, $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\{0,1\}$

טופולוגית מנה על $Y=\{0,1\}$ היא טופולוגית סרפינסקי $\sigma=\{\varnothing,\{0\},\{0,1\}\}$.

$\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ לא פתוחה ולא סגורה (דוגמה נוספת בהמשך).

בנוסף שימו לב שמרחב מנה (שהוא מרחב סרפינסקי) לא T_1.

4. בהעתקות מנה אקסיומות הפרדה לא תמיד נשמרות.

למשל בדוגמה הקודמת ב או בדוגמה של $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

הערה: מרחב מנה הוא בעל תכונת T_1 אם"ם כל מחלקת שקילות היא סגורה.

הערה: ראו גם קובץ מידע נוסף על מרחב מנה