תירגול 2

9 ביולי 2013

מערכת משוואות לינאריות

מבוא

מערכת משוואות לינאריות היא מערכת מהצורה:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}$$ -

כאשר x_iנעלמים עם חזקה 1, a_{ij}, b_iקבועים המגיעים משדה $\mathbf{F}$(אצלנו בקורס $\mathbf{F}=\mathbf{R}\backslash\mathbf{C}$)

דוגמא $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x+8y=0 \end{cases}$, $x_1+x_2+x_3+x_4=1+i$

המטרה: לפתור את המערכת - כלומר למצוא האם יש למערכת פתרון ($x_1, x_2, \ldots, x_n$- כך שהם מקימים את mהמשוואות), אם יש כמה פתרונות יש? (1 או ∞) (בשדות שלנו תמיד הפתרון הוא אחד מהשלושה)

השיטה:

1. שימוש בפעולות מותרות (פעולות שלא משנות את הפתרון של המערכת) על מנת לפשט את המערכת ולהגיע למצב שהפתרון "קופץ לעין" (בהמשך)

- $R_i \leftrightarrow R_j$החלפת שורות (בדוגמא $\begin{cases} 5x+8y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$)השיטה:
- $\alpha R_i \to R_i$, $\alpha \neq 0$ α סקלאר החלפת שורה בכפולה של עצמה (ששונה מ־0) (בדוגמא $\begin{cases} 2.5x+4y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \begin{cases} 5x+8y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$)
- $R_i+\alpha R_j \to R_i$הוספת מכפלה של שורה אחת לשורה אחרת. (בדוגמא $\begin{cases} 5x+8y=0 \\ 4.5x+5y=1 \end{cases} \xrightarrow{R_2+\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \begin{cases} 5x+8y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$)

הערה: פעולות אלו נקראות גם פעולות אלמנטריות

2. מעבר לסימון מטריצות לשם נוחות (בדוגמא $\begin{cases} 5x+8y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$)

הערה: $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ נקראת מטריצת המקדמים ו $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ נקרא וקטור הפתרונות. במקרה הכללי $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

תרגיל 1:

פתור את המערכת הבאה: $\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ x-y+5z=6 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$

פתרון

נעבוד עם המטריצה $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}R_2\to R_2]{-\frac{1}{6}R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1+R_3\to R_1]{R_2+2R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

לסיכום $x=1.5,\ y=-2,\ z=0.5$ הם הפתרון של המערכת.

תרגיל 2:

פתור את המערכת הבאה: $\begin{cases} ix+2y-z=-3 \\ \quad y+5z=6 \\ x+(1-2i)y+(5+i)z=3i \end{cases}$

פתרון

נעבוד עם המטריצה $\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1-2i & 5+i & 0 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1-2i & 5+i & 3i \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+iR_1\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

לסיכום למערכת אין פתרון כי לא קימים x,y,z כך ש $0x+0y+0z=-6$

תרגיל 3:

פתור את המערכת הבאה: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$

פתרון

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הגענו לשורת אפסים!זה אומר שלמערכת שלנו יש אין סוף פתרונות. הסבר: התחלנו עם 3 משוואות ו 3 נעלמים, בסוף גילינו שהמערכת שקולה ל־2 משוואות ב־3 נעלמים (ה משוואה השלישית היא פשוט 0=0) לכן ניתן לבחור את נעלם אחד באופן שרירותי ואז לקבל תת מערכת עם 2 משוואת ו־2 נעלמים שבמקרה שלנו יש לה פתרון. כיוון שניתן לבחור את הנעלם השלישי להיות כל מספר קיבלנו אין סוף פתרונות.

נמשיך לפתור

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-3R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כעת נבחר באופן שרירותי $z=t$ ונקבל $x=\frac{5}{7}-\frac{4}{7}t$, $y=\frac{3}{7}-\frac{8}{7}t$

ובצורה וקטורית $\begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}-\frac{4}{7}t \\ \frac{3}{7}-\frac{8}{7}t \\ t \end{pmatrix}$. לכל t שנציב נקבל פתרון

למשל עבור $t=0$נקבל $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$ ועבור $t=1$ נקבל $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$.

הגדרות נוספות

צורה מדורגת

הגדרה: תהא מטריצה A. ותהא שורה R_iשאינה כולה אפסים. המקדם הראשון בשורה שאינו אפס נקרא איבר מוביל או ציר.

הגדרה: משתנה המתאים לעמודה שקיים בה ציר נקרא משתנה תלוי.

הגדרה: משתנה המתאים לעמודה בלי ציר נקרא משתנה חופשי.

הגדרה: הצורה המדורגת של מצריצה Aהיא מטריצה המתקבלת ע"י פעולות אלמנטריות ומקיימת את התנאים הבאים:

- שורות אפסים מופיעות בסוף.
- מתחת לכל ציר ישנו טור אפסים.
- כל ציר נמצא מימין לציר של השורה שמעליו.

דוגמא סכמטית $\begin{pmatrix} * & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & * & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & * & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (לא צורה מדורגת $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right)$

ע"י הצורה הקנונית ניתן להסיק האם וכמה פתרונות יש למערכת. הסבר:

אם יש שורות אפסים מלאות (כולל ברכיב של וקטור הפתרון) אזי נמחק שורות אלו ונתבונן בתת המערכת שאינה כוללת שורות אלו.
כעת בתת מערכת זאת של מטריצה מדורגת כלשהיא:

- אם יש שורה שכולה אפסים אבל הרכיב בוקטור הפתרון באותה שורה שונה מאפס אין פתרון־ $\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$ $a \neq 0$
- אם אין שורה כזאת
  - אם יש משתנים חופשיים (מספר העמודות של מטריצת המקדמים>מספר השורות=מספר הצירים) ־ יש ∞ פתרונות $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$
  - אם אין משתנים חופשיים (מספר העמודות של מטריצת המקדמים =מספר השורות=מספר הצירים)־ יש פתרון יחיד $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$

הערות:

1. התרגילים שעשינו מהווים דוגמא לכל אחד מבין המצבים.
2. גם כאשר יש ∞פתרונות יש חשיבות לכמה "דרגות חופש" יש (כמה משתנים חופשיים קיימים)

דוגמא: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 12 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ואז y, z משתנים חופשיים ו x משתנה תלוי. $y = t,\ z = s$ ואז $x = 2 - 4s - 3t$
ובצורה וקטורית $\begin{pmatrix} 2-4s-3t \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ לכל בחירה של t, sנקבל פתרון אפשרי (2 דרגות חופש).

3. שאלה: למה בוחרים דווקא את המשתנים החופשיים שרירותית והמשתנים התלויים נקבעים אוטומטית ולא להיפך?

תשובה: נסתכל בדוגמא $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ כלומר $x + 0y = 2$ ברור כי x הוא משתנה תלוי ו y משתנה חופשי. כעת אם נבחר את $y = t$ שרירותית נוכל לבטא את x בעזרת t־ $x = 2 - 0t = 2$ והפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$והכל טוב אבל אם נבחר את $x = t$ שרירותית אזי לא נוכל לבטא את y בעזרת t כי נקבל $t + 0y = 2$ וכמובן שלא ניתן לבודד את y

צורה קנונית

הגדרה־ תהא מטריצה A.הצורה הקנונית של מצריצה Aהיא מטריצה המתקבלת ע"י פעולות אלמנטריות ומקיימת את התנאים הבאים:

- המטריצה בצורה מדורגת
- יש אפסים גם מעל הצירים (כל העמודה של הצירים היא אפסים מלבד הציר)
- כל ציר שווה ל־1

דוגמא סכמטית $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

הערה: בצורה קנונית ניתן לראות באופן ברור את הפתרון. דוגמא $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ הוא פתרון המערכת.

הערה: משפט הצורה הקנונית של מטריצה היא יחידה (בניגוד לצורה מדורגת).

תרגיל: נתון שהמטריצה הבאה בצורה קנונית ־השלם מספרים אפשריים $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & * & 1 \\ * & * & * & 0 & * & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

תרגיל סיכום:

עבור איזה k יש למערכת הבאה פתרון יחיד, ∞פתרונות, אין פתרון $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$?

פתרון:$\rightarrow$ $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(1+1+k) & 1-k \end{pmatrix}$$

אם $k=1$ נקבל בשורה השניה והשלישית שורות אפסים ויהיה ∞פתרונות $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ והפתרון

$$\begin{pmatrix} 1-s-t \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

אם $k=-2$נקבל בשורה השלישית $3=0$ואין פתרון.
בכל מקרה אחר כל הצירים יהיו שונים מ־0 + צורה מדורגת ולכן יהיה פתרון יחיד.
הערה: ניתן להמשיך לצורה קנונית על מנת למצוא את הפתרון היחיד כפונקציה של k.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$ ופתרון הוא $\begin{pmatrix} \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$

תרגיל־נכון/לא נכון (אם יש זמן)

1. למערכת משוואות המיוצגת כמטריצה 4×2 אין פיתרון - לא נכון $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. הצורה המדורגת יחידה- לא נכון $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. למטריצה בגודל $m \times n$יש לכל היותר mצירים- נכון

4. למערכת משוואות עם ∞פתרונות תהיה לפחות שורת אפסים אחת במטריצה המקושרת אליה - נכון

5. בצורה הקנונית יש איבר בכל טור יחיד ששונה מאפס- לא נכון, רק בעמודות עם הצירים $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

6. הצורה המדורגת של מטריצה Aבגודל $1 \times n$היא A- נכון

7. הצורה הקנונית של מטריצה Aבגודל $1 \times n$היא A- לא נכון $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$