תרגול 5

17 בנובמבר 2013

מרחבים וקטורים

דוגמא שכדאי שתהיה ברקע $\mathbb{R}^3 := \{(x,y,z)\,|\,x,y,z,\in\mathbb{R}\}$ עם חיבור $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$ וכפל בסקלאר $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha(x,y,z)=(\alpha z,\alpha y,\alpha z)$ הוא מרחב וקטורי. ההגדרה הפורמאלית מכלילה את הדוגמא.

הגדרה: מרחב וקטורי הוא מבנה הכולל קבוצה V עם פעולת חיבור ושדה $\mathbb{F}$ עם חיבור וכפל שלו. בנוסף, קיים כפל המקשר בין איברי Vלאיברי $\mathbb{F}$(כפל בסקלאר). האקסיומות שמרחב וקטורי צריך לקיים:

1. אקסיומות של החיבור ב V. לכל $v,w,u\in V$ מתקיים
   (א) מוגדרות $v+w\in V$.
   (ב) קיבוץ $v+(u+w)=(v+u)+w$.
   (ג) חילוף $v+u=u+v$.
   (ד) איבר נטרלי $\exists 0\in V:\ \forall v\in V: 0+v=v$.
   (ה) איבר נגדי $\forall v\in V\ \exists(-v)\in V:\ v+(-v)=0$.
2. אקסיומות של כפל וחיבור של שדה -בהגדרת שדה
3. אקסיומות כפל בסקלאר לכל $v,u\in V,\alpha,\beta\in\mathbb{F}$מתקיים
   (א) מוגדרות $\alpha v\in V$
   (ב) קיבוץ $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$
   (ג) כפל יחידה $1_{\mathbb{F}}v=v$
   (ד) פילוג
      i. $\alpha(v+u)=\alpha v+\alpha u$
      ii. $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$

אומרים ש V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. איברי V הנקראים וקטורים. איברי $\mathbb{F}$ נקראים סקלארים.

תכונות בסיסיות:

1. $(-1_F)v=(-v)$
2. $0_F v=0_V$
3. $\alpha v=0_V$ אזי $\alpha=0$ (הסקלאר 0) או $v=0$ (וקטור האפס)

דוגמאות

1. מרחב המטריצות $\mathbb{F}^{m\times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$עם חיבור וכפל בסקלאר שהגדרנו כבר.
2. מרחב הפולינומים מעל שדה מדרגה קטנה שווה ל n
$\mathbb{F}_n[x]=\{a_0+a_1x+\cdots a_nx^n|\, a_i\in\mathbb{F}\}$עם פעולת חיבור פולינומים וכפל בסקלאר טבעיים.
מקרה פרטי $V=\mathbb{R}_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2\,|\,a_i\in\mathbb{R}\}$
עם חיבור $(a_0+a_1x+a_2x^2)+(b_0+b_1x+b_2x^2)=(a_0+b_0)+(a_1+b_2)x+(a_2+b_2)x^2$
וכפל בסקלאר $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha((a_0+a_1x+a_2x^2)=(\alpha a_0)+(\alpha a_1)x^1+(\alpha a_2)x^2$.
נוכיח כי זהו אכן מרחב וקטורי:
אקסיומות של החיבור ב V. לכל $f,g,h\in V$ פולינומים מדרגה לכל היותר 2 מתקיים:
   (א) מוגדרות $f+h\in V$. ־ טרוויאלי על פי הגדרה
   (ב) קיבוץ $f+(g+h)=(f+g)+h$ ־ נובע מתכונת הקיבוץ ב $\mathbb{R}$על המקדמים של הפולינומים.
   (ג) חילוף $f+g=g+f$. ־נובע מתכונת החילוף ב $\mathbb{R}$על המקדמים של הפולינומים.
   (ד) איבר נטרלי ־ פולינום האפס 0 ואכן לכל $f\in V$ מתקיים $0+f=f$
   (ה) איבר נגדי־ לכל $f=a_0+a_1x+a_2x^2\in V$. קיים $(-f)=(-a_0)+(-a_1)x+(-a_2)x^2$ ואכן $f+(-f)=0$.

   אקסיומות כפל בסקלאר לכל $f,g\in V,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים
   (א) מוגדרות $\alpha f\in V$־ טרוויאלי לפי הגדרה
   (ב) קיבוץ $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f$־ מתקיים לפי תכונת הקיבוץ על מקדמי הפולינום.
   (ג) כפל יחידה $1_{\mathbb{R}}f=f$־ כי כל מקדם כפול 1שווה למקדם עצמו
   (ד) פילוג
      i. $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$־מתקיים לפי תכונת פילוג של מספריים ממשיים מתקיים בפרט עבור מקדמי הפולינום.
      ii. $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$־מתקיים לפי תכונת פילוג של מספריים ממשיים מתקיים בפרט עבור מקדמי הפולינום.
3. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]=\{a_0+a_1x+\cdots a_nx^n|\, a_i\in\mathbb{F},n\in\mathbb{N}\}$ עם חיבור וכפל בסקלאר מוכרים.
4. $\mathbb{F}^n:=\{(a_1,\ldots,a_n)|\, a_i\in\mathbb{F}\}$
עם חיבור $(a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n)=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$
וכפל בסקלאר $\alpha(a_1,\ldots,a_n)=(\alpha a_1,\ldots,\alpha a_n)$.
5. $V=\mathbb{R}$הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$.
6. $V=\mathbb{C}^3,\ \mathbb{F}=\mathbb{R}$.

(הערה/חידוד $V=\mathbb{R}^3,\ \mathbb{F}=\mathbb{C}$ אינו מרחב וקטורי כי $i(1,1,1)=(i,i,i)\notin V$.)

תתי מרחבים

הגדרה יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W \subseteq V$ יקרא תת מרחב אם הוא מרחב וקטורי בפני עצמו ביחס לפעולות V .

הערה: כדי לבדוק אם $W \subseteq V$ הוא תת מרחב מספיק לבדוק

1. $w, u \in W$ מתקיים
   (א) מוגדרות $u + w \in W$.
   (ב) איבר נטרלי 0 של Vנמצא ב־W

2. אקסיומות כפל בסקלאר לכל $w \in W, \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים
   (א) מוגדרות $\alpha w \in W$

את שאר האקסיומות W יורש מ V כתת קבוצה.

הערה: ניתן לרכז את הבדיקות הנ"ל מספיק לבדוק

1. $W \neq \emptyset$
2. שלכל $w, u \in W,\ \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha u + w \in W$.

הערה: $\{0\}, V \subseteq V$ תמיד תתי מרחבים ונקראים תתי המרחבים הטריוואלים.

דוגמאות ודוגמאות נגדיות:

1. המישור האוקלידי $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$
   (א) $W = \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$ הרביע החיובי אינו תת מרחב
   כי $-1(1, 1) = (-1, -1) \notin W$
   (ב) $W = \{(x, y) \mid x, y \geq 0 \text{ or } x, y \leq 0\}$ הרביע החיובי והשלילי אינו תת מרחב
   כי $\underset{\in W}{(2, 4)} + \underset{\in W}{(-3, -3)} = (-1, 1) \notin W$
   (ג) $W = \{(x, y) | y = 3x\} = \{(x, 3x)\}$ קו ישר העובר בראשית הוא כן תת מרחב. נוכיח
   i. יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W$ אזי $y_1 = 3x_1, y_2 = 3x_2$ ולכן $y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2)$
   כלומר $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W$
   ii. האיבר הנטראלי של Vהוא $(0, 0)$ והוא שייך ל W
   iii. יהיו $(x, y) \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ צ"ל $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in W.$ לפי נתון $y = 3x$
   ולכן גם $\alpha y = 3\alpha x$כלומר $(\alpha x, \alpha y) \in W$.
   (ד) תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   ויהא $W = \{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$.
   Wכן תת מרחב. נוכיח: (ברור ש $W \neq \emptyset$)

יהיו $A\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} x_2\\ y_2\end{pmatrix} \in W, \alpha\in\mathbb{R}$ אזי

$$A\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\alpha A\begin{pmatrix} x_2\\ y_2\end{pmatrix} = A\left(\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} x_2\\ y_2\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1+\alpha x_2\\ y_1+\alpha y_2\end{pmatrix}.$$

ולכן $A\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\alpha A\begin{pmatrix} x_2\\ y_2\end{pmatrix}\in W$.

הערה: Wכמרחב וקטורי בפני עצמו נקרא מרחב העמודות של A.

(ה) תהא $A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

ויהא $W=\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid A\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=0\}\subset\mathbb{R}^2$.

Wכן תת מרחב. נוכיח: (ברור ש $W\neq\emptyset$)

יהיו $x,y\in W,\alpha\in\mathbb{R}$ (כלומר $Ax=0, Ay=0$) אזי

$A(\alpha x+y)=\alpha Ax+Ay=\alpha 0+0=0$.

ולכן $\alpha x+y\in W$.

הערה: Wכמרחב וקטורי בפני עצמו נקרא מרחב האפס של A.

2. מרחב המטריצות המרוכבות מגודל 2×2. $\mathbb{C}^{2\times 3}$ מעל שדה $\mathbb{C}$

(א) המטריצות מסוג $W=\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} | a\in\mathbb{C}\}$ הן תת מרחב. נוכיח :

(ברור ש $W\neq\emptyset$). כעת יהיו $\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in W$ $\alpha\in\mathbb{C},$

אזי $\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+\alpha b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in W$

(ב) המטריצות הסימטריות $W=\{A\in V \mid A^t=A\}$ הן תת מרחב (בתרגיל).

(ג) המטריצות הסימטריות איחוד עם המטריצות האנטי סימטריות
$W=\{A\in V \mid A^t=A \text{ or } A^t=-A\}$אינו תת מרחב כי
$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\in W$
אבל $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\notin W$.

3. $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$.

(א) $W=\mathbb{R}_1[x]=\{a+bx| a,b\in\mathbb{R}\}$ הינו תת מרחב כי באופן כללי $\mathbb{R}_n[x]$ הוא מרחב וקטורי.

(ב) $W=\{a+bx| 0\neq b\in\mathbb{R}\}$הפולינומים מדרגה 1 בדיוק אינו תת מרחב.
כי פולינום האפס שהוא האיבר הנטרלי ב Vלא נמצא ב W $W\ 0\notin$.

4. $V=\mathbb{R}$הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$.

(א) $W=\mathbb{Q}$הוא תת מרחב כי לכל $v,w\in W,\ \alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha v+w\in W$.

5. $V=\mathbb{R}$הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

(א) $W=\mathbb{Q}$הוא אינו תת מרחב כי $1\in W,\ \sqrt{2}\in\mathbb{F}$ אבל $1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\notin W$

חיתוך של תתי מרחבים

משפט: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $W, U \subseteq V$ תתי מרחבים. אזי
חיתוך תתי המרחבים $W \cap U := \{v \in V \,:\, v \in W \wedge v \in U\}$ הינו תת מרחב
דוגמאות:

1. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. יהיו $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x+y+z=0\}$

ו- $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,:\, -x+y+2z=0\}$ שני מישורים במרחב העוברים בראשית הצירים.

$$W \cap U =$$
$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x+y+z=0 \wedge -x+y+2z=0\} =$$
$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x+y+z=-x+y+2z \wedge x+y+z=0\}$$
$$= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x=z \wedge x+y+z=0\} = (x=t)$$
$$\{\begin{pmatrix} t \\ -3t \\ 2t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = \{t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$$

הערה ניתן לפתור זאת גם ע"י פתירת המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

2. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. יהיו $W = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$

ו- $U = \{\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : \beta \in \mathbb{R}\}$ אזי

$$W \cap U =$$
$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{0\}$$

3. $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ מעל $\mathbb{C}$. יהיו Wתת מרחב של המטריצות הסימטריות ו U תת המרחב של המטריצות האנטי סימטריות אזי:
$W \cap U = \{A : A^t = A \wedge A^t = -A\} = \{0\}$