בוחן: יום שני 9 בבוקר, יום חמישי ערב, יום שישי. תקבלו עדכון על התאריך.
החומר יהיה עד דטרמיננטות כולל.
תזכורת: תהי A קבוצה של וקטורים ב-$\mathbb{R}^n$. $A = \{v_1, v_2, .., v_m\}$.
צירוף לינארי של A הוא וקטור מהצורה

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m$$

לדוגמא:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בהינתן קבוצה $A = \{v_1, .., v_m\}$ של וקטורים, ווקטור v, איך יודעים אם v הוא צירוף לינארי של A?
השאלה היא: האם קיים פתרון למשוואה:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = v$$

שזה בעצם מייצג מערכת משוואות.
המטריצה שמייצגת את המערכת היא בדיוק המטריצה שהעמודות שלה הן $v_1, .., v_m$ ומעבר לקו נמצא הוקטור v.
לדוגמא: האם $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$?
פתרון: שקול לשאלה, האם קיים פתרון למערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

לא מגיעים לשורת סתירה (לא תהיה בכלל שורת אפסים) ולכן למערכת יש פתרון.
לא מעניין אותנו אם למערכת יש פתרון יחיד או אינסוף. השאלה היחידה האם יש פתרון. כלומר, צריך לוודא שאין שורת סתירה.
הגדרה: $span\{v_1, ..., v_m\}$ הוא האוסף של כל הצירופים הלינאריים.
משפט: לכל קבוצת הוקטורים $span\{v_1, .., v_m\}$ הוא תת מרחב.
אלגוריתם: בהינתן קבוצה של וקטורים $v_1, .., v_m \in \mathbb{R}^n$, אנחנו רוצים למצוא במפורש את $span\{v_1, .., v_m\}$.
מה זה אומר למצוא במפורש?
יש 2 תשובות אפשרויות:
1. $span\{v_1, ..., v_m\} = \mathbb{R}^n$. כלומר, אפשר ליצור באמצעות הוקטורים שלנו כל וקטור במרחב.

2. $span\{v_1,..,v_m\}$ הוא תת מרחב שמוכל ממש ב$\mathbb{R}^n$. נרצה לתאר אותו כאוסף הפתרונות של איזשהי מערכת משוואות.
איך נעשה את זה?
ניקח וקטור כללי ב$\mathbb{R}^n$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. השאלה שלנו היא האם יש פתרון למערכת

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

כלומר, האם יש פתרון למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & x_1 \\ v_1 & \cdots & v_m & \vdots \\ & & & x_n \end{array}\right)$$

בעצם השאלה שלנו היא לאילו ערכי $x_1,..,x_m$ יש למערכת פתרון.
נדרג את המערכת עד שנגיע לצורה מדורגת.
אם במהלך הדיגור הגענו לשורת אפסים, על מנת שלא תהיה שורת סתירה אנחנו חייבים שהביטוי בצד ימין יהיה שווה ל0. וזה יתן לנו משוואה על הxים.
אם יש כמה שורות אפסים נקבל כמה משוואות
אם אין בכלל שורות אפסים, אין שום מגבלה על הxים, ואז אפשר להגיע לכל וקטור, לא משנה מי הרכיבים שלו. כלומר, במקרה כזה ה$span$ יהיה $\mathbb{R}^n$ כולו.
דוגמאות: חשבו במפורש את $span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$
פתרון: וקטור כללי ב$\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{array}\right)$$

השאלה שאנחנו שואלים היא לאילו ערכי x, y, z יש למערכת פתרון?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 1 & 3 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 2 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-x-2(y-x) \end{array}\right)$$

בשביל שלמערכת יהיה פתרון, חייבים שהביטוי $z-x-2(y-x)$ יהיה שווה ל0. חוץ מזה אין עוד שורות אפסים ולכן אין עוד דרישות.

כלומר, יש פתרון למערכת אך ורק עבור וקטורים $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ שמקיימים $z-x-2(y-x)=0$.

$$span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z-x-2(y-x)=0\right\}$$

האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ שייך ל$span$?

נציב אותו במשוואה ונראה אם הוא מקיים אותה.

לא מתקיים.

כלומר, הוקטור לא שייך ל$span$.

דוגמא נוספת: מצאו במפורש את $span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

פתרון: יהי $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ וקטור כללי ב$\mathbb{R}^2$. השאלה שלנו היא לאילו ערכי x, y יש פתרון למערכת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 4 & y \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 4 & y \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -2 & y-2x \end{array}\right)$$

הגענו לצורה מדורגת, ואין שורות אפסים. זה אומר שאף פעם לא תהיה שורת סתירה, לא משנה מה הערכים של x וy. כלומר, לכל וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ יהיה פתרון למערכת. כלומר, $span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$.

הערה:

יש 2 הצגות קנוניות של תתי מרחבים.

1. $span\{v_1, ..., v_m\}$

2. אוסף הפתרונות של מערכת משוואות. את מערכת המשוואות ניתן לייצג ע"י מטריצה A. ואז נגיע ל$N(A)$. כלומר, אוסף הוקטורים x, שמקיימים $Ax=0$.

ראינו עכשיו איך עוברים מהצגה 1 להצגה 2.

כעת נעשה את הכיוון השני (למעשה כבר עשינו אותו בעבר)

תרגיל: נסתכל על התת מרחב הבא:

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x-y+2z=0\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

אנחנו רוצים להציג את המרחב הזה כ$span$ של איזושהי קבוצה.
למעשה מה שצריך לעשות זה לפתור את המערכת, ונראה שאנחנו צקבלים צירוף של וקטורים כלשהם. אילו הוקטורים שצריך לקחת.
הדוגמא שלנו יש מערכת של משוואה אחת עם 3 נעלמים, אז יש 2 משתנים חופשיים, נציב שני פרמטרים. $y = s$,$z = t$. אז $x = s - 2t$. הוקטור נראה כך :

$$\begin{pmatrix} s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, המרחב שלנו שווה ל

$$span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

תלות לינארית

הגדרה : תהי $v_1, .., v_m$ קבוצה של וקטורים. צירוף לינארי מתאפס של $v_1, ..., v_m$ הוא אוסף של מקדמים שאם נכפיל אותם בוקטורים לפי הסדר ונחבר נקבל את וקטור ה0.
למשל :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

אז :

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.5\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הצירוף שבו כל המקדמים שווים ל0 נקרא הצירוף הטריוויאלי.
לכל קבוצה של וקטורים, תמיד קיים הצירוף הטרייויאלי שמאפס אותה.

$$0 \cdot v_1 + ...0 \cdot v_m = 0$$

דוגמא נוספת:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

איזה צירופים מתאפסים יש להם?

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 0, \beta = 0$$

כלומר, הצירוף הלינארי המתאפס היחיד הוא הצירוף הטריוויאלי.

הגדרה: קבוצה של וקטורים ב$\mathbb{R}^n$, $v_1, ..., v_m$ נקראת בלתי תלויה לינארית (בת"ל) אם הצירוף הלינארי המתאפס היחיד שלה הוא הצירוף הטריוויאלי.

אחרת, כלומר, אם קיים צירוף לינארי מתאפס לא טריוויאלי, הקבוצה נקראת תלויה לינארית (ת"ל).

למשל, ראינו ש$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ בת"ל, ו$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא קבוצה ת"ל.

דוגמאות נוספות:

- $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ נסתכל על צירוף לינארי מתאפס שלה:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + 3\beta = 0$$

$$2\alpha + 4\beta = 0$$

- הגענו למערכת של 2 משוואות בשני נעלמים. אנחנו יודעים שיש לה לפחות פתרון אחד, הפתרון הטרייויאלי (כל המקדמים שווים ל0). אנחנו רוצים אם הוא הפתרון היחיד או שיש עוד. כלומר, אנחנו שואלים האם למערכת יש פתרון יחיד או אינסוף פתרונות.

מה שקובע זה האם יש משתנים חופשיים.

$$\alpha + 3\beta = 0$$

$$2\alpha + 4\beta = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

בכל עמודה יש איבר מוביל כלומר אין משתנים חופשיים.
זה אומר שיש למערכת פתרון יחיד.
כלומר, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ בת"ל.

שימו לב שכשהעברנו את מערכת המשוואות שלנו למטריצה, עמודות המטריצה היו הוקטורים שאיתם התחלנו.

אז למעשה אפשר לחסוך את הדרך ולעבור ישר למטריצה שהעמודות שלה הן הוקטורים שאיתם אנחנו מתחילים. המטריצה מייצגת מערכת הומוגנית, כלומר, שוקטור התוצאה שווה ל0. לכן לא צריך לכתוב אותו. על המערכת הזאת אנחנו שואלים- האם יש פתרון יחיד או אינסוף פתרונות. כלומר, האם יש משתנים חופשיים.

תרגיל: האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ת"ל?

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -12 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

הגענו לצורה מדורגת. אין משתנים חופשיים. כלומר, הוקטורים בת"ל.

תרגיל: האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ת"ל?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}$$

אין משתנים חופשיים. הוקטורים בת"ל.

תרגיל נוסף: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה השלישי הוא משתנה חופשי. לכן יש אינסוף פתרונות, כלומר, יש צירוף לינארי מתאפס לא טריוויאלי. כלומר, הקבוצה ת"ל.

נדגים איך מוצאים פתרון לא טריוויאלי: בשביל זה צריך לפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{-3} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $z = t$

$$y = -2t$$

$$x = t$$

דוגמא לצירוף לינארי לא טריוויאלי: נבחר $t = 1$

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ואם נרצה למצוא צירוף אחר, נבחר t אחר.

הערה: כשאומרים צירוף לא טריוויאלי הכוונה שלפחות אחד מהמקדמים שונה מ0. יכול להיות שחלק מהקדמים יהיו 0.