מבנים אלגבריים

פתרון תרגיל בית 1

8 בנובמבר 2012

2.1.2 הראה שאם הפעולה אסוציטיבית, אז החזקה מוגדרת היטב. (כלומר, כל הדרכים להכפיל איבר x בעצמו n פעמים מביאות לאותה תוצאה).

פתרון ניזכר בהגדרה באינדוקציה של החזקה ה־n. $x^1 = x$, עבור $n \geq 2$, $x^n = x^{n-1} \cdot x$.

כעת, נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n = 1, 2$ זה טריוויאלי. נניח כי לכל $k < n$ ולכל $1 \leq i \leq k-1$ מתקיים $x^i \cdot x^{k-i} = x^k$. נבדוק נכונות הטענה עבור n. יהי $1 \leq i \leq n-1$. אנחנו צריכים להוכיח כי $x^i \cdot x^{n-i} = x^n = x^{n-1} \cdot x$. מהגדרת חזקה מתקיים $x^{n-i} = x^{n-i-1} \cdot x$. נציב זאת, ונקבל $x^i \cdot x^{n-i} = x^i \cdot \left(x^{n-i-1} \cdot x\right) = \left(x^i \cdot x^{n-i-1}\right) \cdot x = x^{n-1} \cdot x = x^n$. כמובן, יש להצדיק כל מעבר. $\square$

2.1.5 תהי X קבוצה. האוסף X^X של פונקציות $X \to X$, עם פעולת ההרכבה של פונקציות, הוא חבורה למחצה.

פתרון נביט בפעולת ההרכבה.

- מוגדרת היטב: טריוויאלי (= נלמד בקורס במתמטיקה בדידה).
- אסוציטיבית: יהיו $f, g, h \in X^X$. אנחנו רוצים להראות כי $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. פונקציות מוגדרות באמצעות פעולתן על כלל האיברים בקבוצה. לכן נראה שהפונקציות מסכימות בערכיהן על כל האיברים. יהי $x \in X$ נתון. נסמן $y = h(x)$, $z = g(y)$, $w = f(z)$. אזי מתקיים $(g \circ h)(x) = z$, $(f \circ g)(y) = w$. נציב שוויונות אלו לעיל. נקבל באגף ימין $f \circ (g \circ h)(x) = f(z) = w$. באופן דומה באגף שמאל $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(y) = w$. ביחד נקבל שאגף ימין ואגף שמאל נותנים שניהם את אותו הערך w. כך יוצא שלכל x הפונקציות מסכימות על ערכו, ולפיכך הן שוות, כמבוקש. $\square$

2.1.6 קבע האם קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ עם הפעולה $a * b = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$ היא חבורה למחצה.

פתרון לא, כי אין אסוציטיביות. דוגמא נגדית: $a = 1, b = 2, c = 3$. $\square$

2.1.7 נניח שבחבורה למחצה A אפשר לקרוא את הגורמים מתוך המכפלה, כלומר, אם $ab = cd$ אז $a = c$ ו־$b = d$ הוכח ש־$|A| = 1$.

פתרון אנו צריכים להראות כי לכל $a, b \in A$, מתקיים $a = b$, ואז באמת יש בחבורה־למחצה איבר יחיד. לפי אסוציטיביות, $(ab)(ab) = a(bab)$ וכן $(ab)(ab) = (aba)b$. נקרא כל אחת מהמכפלות האלו, ונקבל $ab = a$ ו־$ab = b$. בסך הכל מצאנו כי $a = b$, כמבוקש. $\square$

2.1.13 הראו כי $M=\left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0 \end{pmatrix} |a,b\in\mathbb{R}\right\}$ עם פעולת הכפל היא חבורה־למחצה. האם יש לה איבר יחידה?

פתרון זו קבוצה לא ריקה.

- מוגדר היטב: צריך לוודא שהפעולה סגורה בקבוצה. יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. אזי

$$\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d\\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & ad\\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in M$$

ולכן הפעולה מוגדרת היטב.

- אסוציטיביות: נורשת מהאסוציטיביות של המטריצות (ראו בשאלה הבאה). לפיכך זו חבורה־למחצה.
- איבר היחידה של המטריצות 2×2 אינו נמצא ב־M. נבדוק אם יש שם איבר יחידה אחר. נניח שאיבר היחידה הוא $\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ עבור $a,b\in\mathbb{R}$. נביט מה המכפלה של איבר זה עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. נקבל $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. אם כן, אין איבר ב־$M$ המשאיר את $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ולפיכך אין שם יחידה. $\square$

2.2.4 קבע לגבי כל אחת מהמערכות הבאות האם היא חבורה למחצה והאם היא מונואיד.

1. אוסף המטריצות $M_n\left(F\right)$ עם פעולת הכפל.
2. אוסף הפונקציות הרציפות $\mathbb{R}\to[0,1]$, עם כפל $\left(f*g\right)\left(t\right)=f\left(t\right)\cdot g\left(t\right)$.
3. אוסף המספרים הרציונליים עם הכפל הרגיל.

פתרון נעבור סעיף סעיף.

1. אוסף המטריצות $M_n\left(F\right)$ עם פעולת הכפל.

- זו קבוצה לא ריקה, עם פעולה מוגדרת היטב — טריוויאלי.
- אסוציטיביות: $\left(AB\right)C=A\left(BC\right)$. תכונה זו הוכחה בקורס אלגברה לינארית. זו חבורה־למחצה.
- איבר יחידה: המטריצה I היא איבר יחידה. גם תכונה זו הוכחה שם. זהו מונואיד.

2. אוסף הפונקציות הרציפות $\mathbb{R}\to[0,1]$, עם כפל $\left(f*g\right)\left(t\right)=f\left(t\right)\cdot g\left(t\right)$.

- זו קבוצה לא ריקה, עם פעולה מוגדרת היטב, כי מכפלת פונקציות רציפות היא רציפה ומכפלת פונקציות ממשיות היא ממשית.
- אסוציטיביות: נבדוק האם $\left(\left(f*g\right)*h\right)\left(t\right)=\left(f*\left(g*h\right)\right)\left(t\right)$. חישוב יפשט את המשוואה הזו לכדי $\left(f\left(t\right)\cdot g\left(t\right)\right)\cdot h\left(t\right)=f\left(t\right)\cdot\left(g\left(t\right)\cdot h\left(t\right)\right)$, וזה נכון בגלל אסוציטיביות של הכפל הממשי. זו חבורה־למחצה.

- איבר יחידה: נסמן פונקציה מהאוסף שלנו e המוגדרת על ידי $e(x)=1$ לכל x. ניתן לראות כי מתקיים $f*e=e*f=f$, ולכן זהו איבר יחידה. לפיכך האוסף הוא מונואיד.

3. אוסף המספרים הרציונליים עם הכפל הרגיל. זהו למעשה מקרה פרטי של סעיף 1, עבור $n=1$ ו־$F=\mathbb{Q}$. ניתן גם לראות שהכל מתקיים במישרין.
   - זו קבוצה לא ריקה, עם פעולה מוגדרת היטב. טריוויאלי.
   - אסוציטיביות: טריוויאלי. זו חבורה־למחצה.
   - איבר יחידה: 1 מקיים הנדרש. לכן זהו מונואיד. □

2.2.9 הראה שכל חבורה למחצה S אפשר להרחיב למונואיד $S'=S\cup\{e\}$, אם נגדיר את e להיות איבר היחידה במבנה החדש.

פתרון נסמן את הפעולה ב־S על ידי $\circledast$ ואת הפעולה ב־S' על ידי $*$. הגדרת $*$ היא:

$$a*b=\begin{cases}a\circledast b & a,b\in S\\ a & b=e\\ b & a=e\end{cases}$$

נבדוק האם זהו מונואיד. מוגדרות היטב: ניתן לבדוק שלכל זוג ב־S' יש תוצאה יחידה. איבר יחידה: e הוא איבר יחידה. כי עבור $a\in S$, $a*e=e*a=a$, ועבור $a=e$ מתקיים כמובן $e*e=e$. אם כן זהו מונואיד. □

2.2.10 תאר את המונואיד המתקבל לאחר חזרה n פעמים על הבנייה של תרגיל **2.2.9**, כשמתחילים ממונואיד האפס $\{0\}$.

פתרון אנו נתחיל בבחינת שני המקרים הראשונים. בכל פעם אנו נסמן את האיבר החדש ב־n.

$n=1$: אנו מביטים במונואיד $\{0,1\}$, כאשר $1*1=1$, ובכל שאר המקרים מתקבל 0. $n=2$: אנו מביטים במונואיד $\{0,1,2\}$, כאשר $2*2=2$, $2*1=1*1=1*2=1$, וכן $2*0=1*0=0*0=0*1=0*2=0$. בסך הכל אנו רואים כאן שהפעולה $*$, בסימון הזה, היא פעולת מינימום.

נוכיח זאת באינדוקציה. נניח שכעבור n שלבים קיבלנו את המונואיד $\{0,1,\dots,n\}$ עם פעולת המינימום. כעת נרחיב למקרה ה־$n+1$. אנו נקבל את המונואיד $\{0,1,\dots,n+1\}$. בין האיברים שאינם האיבר החדש הפעולה היא פעולת מינימום. בין $n+1$ לעצמו אנו מקבלים את המינימום גם כן, קרי $n+1$ בעצמו. בין האיברים הישנים ל־$n+1$ אנו נקבל את האיבר הישן, שהוא אכן המינימלי המבוקש.

לסיכום, אנו מקבלים לאחר n שלבים כי המונואיד המתקבל הוא $\{0,1,\dots,n\}$ עם פעולת המינימום. □

3.1.17 קבע האם הקבוצה $G=\{x\in\mathbb{R}|\tan(x)\in\mathbb{Q}\}$ היא חבורה ביחס לפעולת החיבור.

פתרון מוגדר היטב: יהיו $x,y\in G$. נביט ב־$z=x+y$. נבדוק האם $z\in A$. ברור שזהו מספר ממשי. נותר לבדוק האם מתקיים התנאי, $\tan(z)\in\mathbb{Q}$.

$$\tan(z)=\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\in\mathbb{Q}$$

וכך אנו מקבלים שהפעולה מוגדרת היטב.

אסוציטיביות: נורשת מהחיבור ב־$\mathbb{R}$.

יחידה: 0 היא היחידה של החיבור ב־$\mathbb{R}$. אם היא נמצאת גם כאן אז היא נורשת לכאן. ובכן, $\tan 0 = 0 \in \mathbb{Q}$, ולכן $0 \in G$, וזו היחידה המבוקשת.

הפיכות: יהי $x \in G$. עלינו לבדוק שההפיך שלו ב־$(\mathbb{R}, +)$, הלא הוא $-x$, נמצא גם הוא ב־G. ובכן, $\tan(-x) = -\tan(x) \in \mathbb{Q}$, ולכן $-x \in G$.

לסיכום זוהי חבורה, כנדרש. $\square$

3.1.19 נתבונן בפונקציות הממשיות $f_a : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+ax^2}}$. הוכיחו ש־$G = \{f_a | a \in \mathbb{R}\}$ היא חבורה ביחס להרכבת פונקציות.

פתרון ראשית נוודא שאיברי החבורה מוגדרים היטב. ואכן תחום ההגדרה של f_a הוא כל $\mathbb{R}$.

מוגדרות היטב (של פעולת החבורה, הרכבה): יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ נתונים. נבדוק כיצד נראית ההרכבה $f_a \circ f_b$:

$$\begin{aligned} f_a \circ f_b(x) &= f_a\left(\frac{x}{\sqrt{1+bx^2}}\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+bx^2}}}{\sqrt{1+a\left(\frac{x}{\sqrt{1+bx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+bx^2}}}{\sqrt{1+\frac{ax^2}{1+bx^2}}} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+bx^2}}}{\frac{\sqrt{1+bx^2+ax^2}}{\sqrt{1+bx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(a+b)x^2}} = f_{a+b}(x) \in G \end{aligned}$$

אם כן ראינו כאן שההרכבה סגורה בתוך G.

אסוציטיביות: נורשת מהאסוציטיביות של הפונקציות הממשיות, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

יחידה: איבר היחידה ב־$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ הוא פונקצית הזהות. ואכן $Id = f_0 \in G$ ולפיכך איבר היחידה נורש.

הפיכות: מהחישוב של ההרכבה קל לראות כי לכל $a \in \mathbb{R}$, האיבר ההופכי ל־f_a הוא f_{-a}, כי $f_a \circ f_{-a} = f_{-a} \circ f_a = f_0$. $\square$