תרגיל 4 אינפי 4

19 באפריל 2017

תרגיל 1. עבור התבנית הבאה קבעו אם היא סגורה והאם היא מדוייקת בכל $\mathbb{R}^3$. אם היא מדוייקת מצאו לה פונקציית פוטנציאל.

$$\omega = (y^2 + 2xz^2)\mathrm{d}x + (2xy + 3y^2z^3)\mathrm{d}y + (2x^2z + 3y^3z^2)\mathrm{d}z$$

פתרון. קודם כל נבדוק אם התבנית סגורה. נסמן

$$\omega = F_1\mathrm{d}x + F_2\mathrm{d}y + F_3\mathrm{d}z$$

אז באמת

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 4xz = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 9y^2z^2 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

אז התבנית סגורה ומפני ש $\mathbb{R}^3$ הוא תחום כוכבי אז התבנית מדויקת.נסמן את פונקציית הפוטנציאל ב $g(x,y,z)$ אז

$$g(x,y,z) = \int y^2 + 2xz^2\mathrm{d}x = y^2x + x^2z^2 + C(y,z)$$

נגזור לפי y ונקבל ש

$$2xy + 3y^2z^3 = F_2 = \frac{\partial g}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 3y^2z^3$$

ולכן

$$C(y,z) = \int 3y^2z^3\mathrm{d}y = y^3z^3 + C(z)$$

ולכן
$$g(x,y,z)=y^2x+x^2z^2+y^3z^3+C(z)$$
נגזור לפי z ונקבל
$$2x^2z+3y^3z^2=F_3=2x^2z+3y^3z^2+C'(z)$$
לכן
$$C'(z)=0$$
ולכן
$$C(z)=C$$
כלומר פונקציית הפוטנציאל היא:
$$g(x,y,z)=y^2x+x^2z^2+y^3z^3+C$$

תרגיל 2.

1. תהי D קבוצה סגורה חסומה וקשירה ב $\mathbb{R}^2$ ששפתה היא עקומה חלקה למקוטעין.
הוכיחו כי השטח של D שווה ל
$$\int\limits_{\partial D} x\mathrm{d}y$$
כאשר המסילה ∂D מכוונת נגד כיוון השעון.

פתרון. נובע די מהר ממשפט גרין כי בתבנית שלנו
$$P=0 \quad Q=x$$
ולכן לפי משפט גרין
$$\int\limits_{\partial D} x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
שזה בדיוק השטח של D.

2. נסמן ב P את המצולע שקודקודיו (לפי הסדר) הם:
$$(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)$$
השתמשו בסעיף א' כדי לחשב את שטח המצולע.

פתרון 3. טוב אז לפי סעיף א' שטח המצולע הוא
$$\int\limits_{\partial D} x\mathrm{d}y$$

נפצל את החישוב לפי קטעים. מסילה שמתחילה ב (x_0, y_0) ומסתיימת ב (x_1, y_1) אפשר להציג עם פרמטריזציה

$$x = t$$

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(t - x_0) + y_0$$

כלומר

$$\gamma(t) = (t, \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(t - x_0) + y_0)$$

כאשר $x_0 \leq x \leq x_1$ (נניח בה"כ כי $x_0 < x_1$) ולכן

$$\gamma'(t) = (1, \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0})$$

אם נציב את זה בנוסחת האינטגרל נקבל ש

$$\int\limits_{\gamma} x\mathrm{d}y = \int\limits_{x_0}^{x_1} t \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\mathrm{d}t = \frac{(y_1 - y_0)}{2(x_1 - x_0)}t^2\Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{(y_1 - y_0)(x_1 + x_0)}{2}$$

אז אם נציב את הערכים במקרה שלנו נקבל

צלע $(0,0)$- $(1,1)$: אינטגרל שווה $\frac{1}{2}$.

צלע $(1,1)$ - $(2,4)$: אינטגרל שווה $\frac{9}{2}$.

צלע $(2,4)$- $(3,9)$: אינטגרל שווה ל $\frac{25}{2}$.

צלע $(3,9)$-$(4,16)$: אינטגרל שווה ל $\frac{49}{2}$.

צלע $(4,16)$ - $(0,0)$: אינטגרל שווה ל -32.

בסך הכל נקבל

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} - 32 = 10$$

תרגיל 4. חשבו את האינטגרל

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

עבור המקרים הבאים:

1. $Q = -xy^2$ ו $P = x^2(y+1)$

$$\Gamma = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

פתרון. טוב, נשתמש במשפט גרין. במקרה שלנו

$$\int_{\Gamma} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\le 1} (-y^2 - x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

נבצע החלפת משתנים פולרית ונקבל

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}(-\frac{1}{4})\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2}$$

2. $Q = -xy^2 \quad P = x^2(y+1)$ ו

$$\Gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1, \quad y\ge 0\}$$

פתרון. שוב נשתמש במשפט גרין אבל הפעם צריך להשלים את חצי המעגל עם מסילה

$$\delta(t) = (t,0) \quad t\in[-1,1]$$

ועכשיו התחום D יהיה חצי המעגל העליון. אז נחשב את המרכיבים שלנו. כמו קודם,

$$\int_{\Gamma} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D (-y^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\int_0^1 -r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

אבל שימו לב שהזוית היא רק עד π כי זה רק החצי העליון של המעגל. האינטגרל הזה שווה ל

$$-\frac{\pi}{4}$$

עכשיו האינטגרל המסילתי

$$\int_{\delta}(x^2(y+1))\mathrm{d}x + (-xy^2)\mathrm{d}y$$

שווה לפי הנוסחא הרגילה ל

$$\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$$

לפי גרין נקבל ש

$$\iint_D(-y^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\delta}(x^2(y+1))\mathrm{d}x+(-xy^2)\mathrm{d}y+\int_{\Gamma}(x^2(y+1))\mathrm{d}x+(-xy^2)\mathrm{d}y$$

אז לסיכום

$$\int_{\Gamma}(x^2(y+1))\mathrm{d}x + (-xy^2)\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

3. $P = x(x+y)^2 + e^{-x^3}, \quad Q = e^{-(x-y)^3}$

$\Gamma = \{(x,y) \mid |x| + |y| = 2\}$

הדרכה: בצעו החלפת משתנים $z = x + y$ ו $w = x - y$.

פתרון. נסמן ב D את השטח התחום ע"י Γ. אפשר להבין שזה ריבוע שקודקודיו הם: $(\pm 2, 0), (0, \pm 2)$. אז לפי משפט גרין

$$\int_\Gamma (x(x+y)^2 + e^{-x^3})\mathrm{d}x + (e^{-(x-y)^3})\mathrm{d}y = \iint_D -3(x-y)^2 e^{-(x-y)^3} - 2x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

נציב לפי הרמז

$$w = x + y \quad z = x - y$$

מטריצת יעקובי של החלפת המשתנים הזאת היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

והדטרמיננטה שלה היא

$$-2$$

לכן צריך לחלק את האיניטגרל ב 2. כמו כן, קל לראות שהתחום החדש הופך להיות פשוט $-2 \le z \le 2$ ו $-2 \le w \le 2$ ולכן

$$\begin{aligned}
\iint_D -3(x-y)^2 e^{-(x-y)^3} - 2x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} ((-3z^2 e^{-z^3} - (w+z)w))|\frac{1}{-2}|\mathrm{d}z\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{-z^3} - w^2 z - \frac{1}{2}wz^2\Big|_{-2}^{2}\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{-8} - e^{8} - 4w^2\mathrm{d}w = 2(e^{-8} - e^{8}) - \frac{2}{3}\cdot 16
\end{aligned}$$

4. $Q = x \quad P = -y + \cos x$ ו

$\Gamma = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 + 2xy = 1\}$

פתרון. לפי משפט גרין

$$\int_\Gamma (-y + \cos x)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \iint_D (1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

אז רק צריך להבין מה השטח של התחום D הכלוא בתוך Γ. היות ש

$$x^2 + 3y^2 + 2xy = 1$$

אפשר לכתוב גם כ

$$(x+y)^2 + 2y^2 = 1$$

די ברור שזאת אליפסה. אם נעשה החלפת משתנים

$$\begin{aligned} z &= x + y \\ w &= y \end{aligned}$$

נקבל שזאת החלפת משתנים שלא משנה שטח (כי מטריצת יעקובי היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והדטרמיננטה שלה היא 1) ולכן זה אותו שטח כמו האליפסה

$$z^2 + 2w^2 = 1$$

$$z^2 + \frac{w^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

אז השטח הוא

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

והאינטגרל הוא

$$\pi\sqrt{2}$$

תרגיל 5. הוכיחו כי עבור $a > b$, השטח של (פנים) הציקלואידה

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} \leq (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

הוא

$$\frac{3\pi(a^2 - b^2)^2}{8ab}$$

הדרכה: הסבירו קודם מדוע

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \quad y = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

עבור $t \in [0, 2\pi]$ היא פרמטריזציה של הציקלואידה המדוברת.

פתרון. טוב. נשים לב שאם נציב

$$z = \sqrt[3]{ax} \quad w = \sqrt[3]{by}$$

אז אנחנו נקבלים בעצם

$$z^2 + w^2 = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

שזו משוואת מעגל קלאסית עם פרמטריזציה

$$z=(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}\cos t \quad y=(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}\sin t$$

עכשיות היות ש $\sqrt[3]{x}$ היא פונקציה חד חד ערכית ועלת נקבל ש

$$x=\frac{z^3}{a}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$$

$$y=\frac{w^3}{b}=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$$

נותן לנו פרמטריזציה לציקלואידה (כוללים הכל ולא מפספסים אף נקודה). עכשיו נשתמש במשפט גרין ונשתמש בנוסחא לשטח

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

עבור המסילה שלנו

$$\gamma(t)=(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t)$$

$$\gamma'(t)=(3\frac{a^2-b^2}{a}\cos^2 t(-\sin t),3\frac{a^2-b^2}{b}\sin^2 t(\cos t))$$

אז נציב באינטגרל שלנו ונקווה לטוב

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 t+\cos^4 t\sin^2 t\mathrm{d}t$$

אז נשאר למעשה להוכיח ש

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 t+\cos^4 t\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$$

אבל באמת

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 t+\cos^4 t\sin^2 t\mathrm{d}t&=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

ובזה סיימנו.