

## אנליזה מתקדמת למורים, תרגיל 2

3 בדצמבר 2019

1. פתרו את המשוואות הבאות:

$$z^3 = 6 \operatorname{cis} \frac{\pi}{5} \quad (\text{א})$$

$$(\bar{z})^4 = 2 + i \quad (\text{ב})$$

$$z^3 \cdot (1 + i) = 2 \quad (\text{ג})$$

$$3z^5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} \quad (\text{ד})$$

2. שורשי היחידה.

(א) מצאו שני שורשי יחידה שונים מסדר 5,  $z, w$ , כך ש-  $z \cdot w = 1$ .

(ב) מצאו שלושה שורשי יחידה שונים מסדר 7,  $z, w, q$ , כך ש-  $z \cdot w \cdot q = 1$ .

3. נתון המספר המרוכב  $z = r \operatorname{cis} \theta, r > 0$ , ונתון עוד מספר  $w = \frac{z}{\bar{z}}$ .

(א) הביעו באמצעות  $r, \theta$  את  $w, \bar{w}, -\frac{1}{w}$ .

(ב) נתון ש  $w$  נמצא ברביע הראשון. מהו טווח הזוויות האפשרי עבור  $\theta$ ?

(ג) נתונה סדרה הנדסית  $a_n$  שבה  $a_2 = w, a_1 = \frac{1}{z}$ . הראו שאם  $z$  נמצא מחוץ למעגל היחידה אז גם  $a_5$  נמצא מחוץ למעגל היחידה.

4. פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים ממשיים ממעלה לכל היותר 2:

$$x^4 + 16 \quad (\text{א})$$

$$x^3 + 1 \quad (\text{ב})$$

$$x^5 + 32 \quad (\text{ג})$$

5. שאלת בונוס. הוכיחו: אם  $n$  זוגי אז מכפלת שורשי היחידה מסדר  $n$  היא  $-1$ :

ואם  $n$  אי זוגי אז המכפלה היא 1:  $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 1$ . כאשר  $z_k = \operatorname{cis} \frac{2\pi k}{n}$ .