תרגיל 12

.1

(א) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ ע"י: $x_1+y_1^2=x_2+y_2^2 \iff (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$.
הוכיחו ש $\mathbb{R}^2/\sim\,\cong\mathbb{R}$. רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל$\hat{f}$ מ$\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}^2/\sim$.
הוכחה:

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,y)=x+y^2$. f רציפה כפולינום. מכבדת את יחס השקילות באופן חזק, וכן f על, כי למשל מקור של r הוא $(r,0)$. לכן קיימת $\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim\,\to\mathbb{R}$ והיא חח"ע ורציפה. נוכיח שההופכית רציפה. נגדיר את ההופכית כך $g(r)=[(r,0)]$. זה בעצם הרכבה של שתי פונקציות: $g':\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $g'(r)=(r,0)$, ופונקציית המנה ששולחת כל איבר למחלקת השקילות שלו. g' רציפה כי היא רציפה רכיב־רכיב (פונקציית הזהות ופונקציה קבועה), ופונקציית המנה רציפה מההגדרה של טופולוגיית המנה. כלומר, g היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

קל לראות שg וf הופכיות אחת לשניה.

(ב) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 \iff (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$.
למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?
פתרון:
$\mathbb{R}^2/\sim\,\cong[0,\infty)$.

הוכחה: נגדיר את הפונקציה הבאה: $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ ע"י $f(x,y)=x^2+y^2$. f רציפה כפולינום ומכבדת את יחס השקילות בצורה החזקה. כמו כן f על, כי המקור של $r\geq 0$ הוא $(\sqrt{r},0)$. לכן יש $\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim\,\to[0,\infty)$ מוגדרת, רציפה וחח"ע. נמצא את ההופכית. נסתכל על $g(r)=[(\sqrt{r},0)]$. קל לראות שהיא אכן ההופכית של $\hat{f}$. כמו בסעיף א, g היא הרכבה של פונקציות $g':[0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g'(r)=(\sqrt{r},0)$, ופונקציית המנה $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/\sim$. g' רציפה רכיב־רכיב ולכן רציפה. קיבלנו שg היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

.2 יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל מיחס השקילות הבא: $(x=y\vee x=-y) \iff x\sim y$. הוכיחו ש $X\cong[0,\infty)$.
פתרון:

נגדיר $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ ע"י $f(x)=|x|$. קל לראות שהפונקציה על, וכן ידוע שהיא רציפה. בנוסף, מתקיים $x\sim y \iff f(x)=f(y)$. לכן קיימת $\hat{f}:\mathbb{R}/\sim\,\to[0,1)$ והיא חח"ע,על ורציפה. נוכיח שf פתוחה: תהי $O\subseteq\mathbb{R}$, נראה ש$f(O)$ פתוחה. יהי $x\in O$, צריך להוכיח של$f(x)$ יש סביבה פתוחה בO. ובכן, אם $x>0$ אז יש $x\in(r,s)\subseteq O$ כך ש $0<r$. לכן $f(x)=x\in(r,s)=f(r,s)\subseteq f(O)$. אם $x<0$ אז יש $x\in(s,t)\subseteq O$ כך ש $t<0$. לכן $f(x)=-x\in(-t,-s)=f(s,t)\subseteq f(O)$.

אם $x=0$, אז יש $0 \in (s,t) \subseteq O$. אז $0 \in [0,t) = f[0,t) \subseteq f(O)$, ו$[0,t)$פתוח ב$[0,\infty)$. כלומר, $f(O)$ פתוחה $\Longleftarrow f$ פונקציה פתוחה.

מסקנה: f מנה ולכן $\hat{f}$ מנה. בנוסף, $\hat{f}$ חח"ע, לכן $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

3. יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל ע"י זיהוי כל הנקודות מנורמה גדולה שווה מ1. כלומר $x \sim y$ אמ"ם $x=y$, או ש $|x| \geq 1 \wedge |y| \geq 1$. הוכיחו ש $X \cong S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.
הוכחה:

הוכחתם בהרצאה ש$[0,1] \cong S^1$כאשר מזהים את הנקודות 0 ו1. כמו כן, ידוע ש $[0,1] \cong [-1,1]$. לכן מספיק להוכיח ש $X \cong [-1,1]/\sim$ עם יחס השקילות של זיהוי הנקודות -1 ו1.

נגדיר $f : \mathbb{R} \to [-1,1]/\sim$ ע"י

$$f(x) = \begin{cases} [1] & |x| \geq 1 \\ [x] & otherwise \end{cases}$$

קל לראות שf על ומכבדת את יחס השקילות בצורה החזקה.

נוכיח שf רציפה. נשים לב שניתן להגדיר את f בצורה הבא:

$$f(x) = \begin{cases} [1] & x \in (-\infty,1] \cup [1,\infty) \\ [x] & x \in [-1,1] \end{cases}$$

כלומר, f מוגדרת בחלקים על תתי קבוצות סגורת. הוכנו בעבר שאם יש מספר סופי של קבוות סגורות שמכסות את המרחב, ופונקציה מוגדרת בחלקים על הקבוצות הסגורות, מתלכדת על החיתוכים, ורציפה בכל קבוצה סגורה, אז היר רציפה. לכן מספיק להראות שהחלקים של הפונקציה רציפה.

החלק הראשון הוא פונקציה קבועה ולכן רציף.

החלק השני הוא הרכבה של פונקציית הזהות $id : [-1,1] \to [-1,1]$ עם פונקציית המנה ולכן רציף.

לסיכום: $\hat{f} : \mathbb{R}/\sim \to [-1,1]/\sim$ מוגדר חח"ע ורציף.

כעת, נשים לב ש$\mathbb{R}/\sim$ קומפקטי, כי $\Pi|_{[-1,1]} \to \mathbb{R}/\sim$ הוא על, ו$[-1,1]$ הוא קומפקטי, וכידוע תמונה רציפה של קומפקטי היא קומפקטית.

לסיכום: $\hat{f}$ רציף, על וחח"ע מקומפקטי להאוסדורף, ולכן העתקת מנה חח"ע, כלומר, הומיאומורפיזם.

4. תנו דוגמא להעתקת מנה שהיא לא פתוחה ולא סגורה.
פתרון:

נחזור על הדוגמא מהתרגול. תהי $X=[0,1]$, ו$Y=\{0,1\}$ עם טופולוגיית שרפינסקי. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,\frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

בדקו שזוהי אכן פונקציית מנה. f לא פתוחה כי $f(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}) = \{1\}$, שהוא לא פתוח, ולא סגורה כי $f[0, \frac{1}{4}] = \{0\}$, שהוא לא סגור.

5. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{R}$ באופן הבא: נאמר ש$C \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C = A \cup T$ עבור A תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית, וT היא תת קבוצה כלשהי של S. הוכחתם בתרגיל בית 5 שהמשלימים של הקבוצות האלו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$. נסמן את הטופולוגיה הזאת בτ.

(א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O \in \tau \iff O = B \cap T$ כאשר B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$S^c \subseteq T$.
הוכחה:

B פתוחה אמ"ם B^c סגורה אמ"ם $B^c = A \cup T$ כאשר A סגורה בטופולוגיה האוקלידית ו$T \subseteq S$. כלומר, $B = (A \cup T)^c = A^c \cap T^c$ כך ש A^c פתוחה ו $S^c \subseteq T^c$.

(ב) הוכיחו שτ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש $(\mathbb{R}, \tau)$ הוא האוסדורף.
הוכחה:

תהי O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית. אז $O = O \cap \mathbb{R}$, ומתקיים ש O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו$S^c \subseteq \mathbb{R}$. לכן O פתוחה בτ. הטופולוגיה האוקלידית היא T_2 , וידוע שכל טופולוגיה שמכילה טופולוגיה האוסדורפית, היא האוסדורפית.

(ג) הראו שאם $O \in \tau$ כך ש $S \subseteq O$, אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.
הוכחה:

לפי סעיף א', יש U פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, ו$S^c \subseteq T$ כך ש $O = B \cap T$. אבל $S \subseteq O$. כלומר, $S \subseteq B, T$. נתון ש $S^c \subseteq T$. נקבל ש $T = \mathbb{R}$. כלומר $O = B \cap T = B \cap \mathbb{R} = B$. כלומר, O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.

(ד) הוכיחו שלא קיימות U, V פתוחות בτ וזרות כך ש $0 \in U, S \subseteq V$. הסיקו ש $(\mathbb{R}, \tau)$ אינו T_3.
הוכחה:

נניח בשלילה שיש קבוצות כאלו.

אם $V \in \tau$ כך ש $S \subseteq V$ אז V פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, לפי סעיף קודם.

$U = B \cap T$ כמו בסעיף א'.

לפי ההנחה בשלילה, $U \cap V = \emptyset$. כלומר, $B \cap T \cap V = \emptyset$.

$0 \in B$. וB פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, לכן $B \cap S \neq \emptyset$. (כי בטופולוגיה האוקלידית $(\frac{1}{n}) \to 0$).

כלומר, $B \cap V \neq \emptyset$. מכיוון ששתיהן פתוחות בטופולוגיה האוקלידית, $B \cap V$ פתוחה באוקלידית. נזכר כי כל קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ היא לא בת מנייה, לכן $|B \cap V| > \aleph_0$.

כעת, $T^c \subseteq S$. כלומר, המשלים של T הוא בן מנייה. לכן $B \cap V \nsubseteq T^c$. זה אומר ש $B \cap V \cap T \neq \emptyset$. סתירה.

נשים לב כי $S = \emptyset \cup S$ סגורה בτ, ו$S \notin 0$. אבל ראינו שלא ניתן להפריד בין 0 לS. מסקנה: $(\mathbb{R}, \tau)$ הוא לא T_3.