ב"ה

אוניברסיטת בר אילן,
המחלקה למתמטיקה.

מבחן בקורס: **משוואות דיפרנציאליות** **88-625-01**

ד"ר יעקב קרסנוב, ד"ר גרגורי אושרוביץ'
סמסטר א, מועד א' תשע"ג **כ"א בשבט תשע"ג , 01.02.2013**

משך הבחינה: **שעתיים וחצי**
חומר עזר מותר ללא הגבלה אך השימוש במחשב נייד\טאבלט אסור בהחלט.

יש לענות בפירוט על 5 מתוך 6 השאלות.
אם פתרתם את כל השאלות – נא לציין 5 שאלות לבדיקה, אחרת תיבדקנה 5 הראשונות.
כל השאלות שווה-משקל. נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות.

1. בדקו האם המשוואה הדיפרנציאלית $xy' = xy - 2y$ ניתנת להפרדה משתנים.
   א. (15 נק') פתרו את המשוואה אם נתון ש- $y(0) = 2$.
   אין פתרון, הפתרון כללי הוא $lny = x - 2lnx + C \to \frac{dy}{y} = \frac{(x-2)dx}{x}$, $y = \frac{Ce^x}{x^2}$
   (5 נק') האם הפתרון הוא יחיד? נמקו היטב.
   פתרון לא קיים, פונקציה $\frac{xy-2y}{x}$ לא רציפה

2. נתונה משוואה דיפרנציאלית $(x - ny^2)y' + y = 0$, כאשר n קבוע ממשי.
   א. (5 נק') עבור אילו ערכי n המשוואה הדיפרנציאלית הינה מדויקת. עבור כל n
   ב. (15 נק') פתרו את המשוואה בהתאם לתוצאות שקיבלת בסעיף א'.
   תשובה: $xy - \frac{n}{3}y^3 = C$

3. נתונה משוואה דיפרנציאלית $y'' = 3y' - 2y - 2 + e^x$.
   א. (15 נק') מצאו **פתרון פרטי** של המשוואה.

   ב. (5 נק') כתבו צורה כללית לפתרון אם נתון ש $y(0) = -1, \quad y'(0) = -1$.
   תשובה: $y = -1 - xe^x$

   הערה: פתרון כללי למשוואה הומוגנית הוא $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

4. נתונה מערכת משוואות דיפרנציאליות $\begin{cases} x' = 2x - y - 1 \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$.
   א. (15 נק') פתרו את המערכת המשוואות.
   ב. (5 נק') מצאו את $x(1)$ ו- $y(1)$ אם נתון תנאי שפה $y(0) = 2$, $x(0) = 1$.
   תשובה : $x(t) = 1 - t - t^2, \quad y(t) = 2 - 2t^2$

5. נתונה משוואה הדיפרנציאלית $y'' - xy' + 4y = 0$.

אוניברסיטת בר אילן,
המחלקה למתמטיקה.

א.   (15 נק') פתרו את המשוואה בעזרת טור חזקות סביב $x_0 = 0$. רשמו את נוסחת נסיגה ואת ארבעה איברים ראשונים של הטור. $a_{n+2} = \frac{n-4}{(n+2)(n+1)} a_n$

ב.   (5 נק') כתבו את הפתרון כסכום של שני פתרונות בלתי תלויים.

תשובה: $y(x) = y(0)\left[1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)\right] + y'(0)\left[x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + O(x^7)\right]$,

6.   פתרון הבעיה התחלה למשוואת חום $u_t = a^2 u_{xx} \quad t > 0, -\infty < x < \infty \quad u(x,0) = \varphi(x),$ ניתן למצוא בעזרת נוסחת Green במוט בלתי מוגבל.

א.   (5 נק') מצאו צורה של גל החום בזמן $t = 1$ כך שתנאי ההתחלה הוא $u(x,0) = \varphi(x) = e^{-x^2}$.

ב.   (15 נק') פתרו את הבעיה שפה למשוואת חום $u_t = a^2 u_{xx} \quad t > 0, x > 0$, כך ש- $u(0,t) = 0$ עם תנאי התחלה $u(x,0) = e^{-x^2}$ על פי נוסחה מסעיף א'.

תשובה:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}}\right] \varphi(y)\,dy$$

בהצלחה!