

אלגברה מופשטת – תרגיל 3

שאלה 1

פתרו את המשוואה $x = (12)(132)^{-1}$ ב- S_3 .

שאלה 2

א. הוכיחו שבחבורת הסימטריה S_n כל שני מחזורים זרים מתחלפים זה עם זה.

ב. הוכיחו שאם α, β הם מחזורים זרים, אזי $ord(\alpha\beta) = lcm(ord(\alpha), ord(\beta))$.

ג. בחבורה S_8 מצאו איברים מסדר 4, 7, 12, 15, 19, 20. אם אין איבר מסדר מסויים, הסבירו מדוע.

ד. הוכיחו שהמחזורים $(12345), (13524) \in S_6$ מתחלפים, על אף שאינם זרים.

ה. תהי $H = \langle (14), (13) \rangle$ תת חבורה של S_4 . רשמו את לוח הכפל שלה ואז

הוכיחו שהיא איזומורפית ל- S_3 . כתבו את האיזומורפיזם בצורה מפורשת.

שאלה 3

א. הוכיחו שחבורת קליין, כלומר תת חבורה של S_4 המוגדרת על-ידי

$$V = K_4 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle, \text{ איזומורפית ל-} U_8.$$

ב. רשמו את איברי תת החבורה של S_6 הנוצרת על ידי שני האיברים

$$(145)(263), (15)(36).$$

הערה: על מנת להיזכר בהגדרה של חבורה שנוצרת על ידי מספר אברים, ראו תרגיל 1.4.24 בחוברת הקורס.

שאלה 4

תארו את הקוסטים השמאליים והימניים של חבורה G לגבי ת"ח H :

א. $G = 4\mathbb{Z}, H = 12\mathbb{Z}$

ב. $G = S_3, H = \langle (13) \rangle$

ג. $G = S_3, H = \langle (123) \rangle$

$$ד. \quad G = U_{30}, H = \langle 13 \rangle$$

שאלה 5

הוכיחו את המסקנה הבאה ממשפט לגרנז': תהי G חבורה סופית, ויהיו

$$K \leq H \leq G \text{ ת"ח. אזי } [G:K] = [G:H][H:K].$$

[תרגיל אתגר: הוכיחו את אותה תוצאה כאשר מניחים רק ש- K תת חבורה מאינדקס סופי ב- G . כלומר, מבלי להניח ש- G סופית, ומבלי להניח סופיות של H . שימו לב שבמקרה זה, זו אינה מסקנה ממשפט לגרנז', אלא הכללה שלו.]

שאלה 6

א. מצאו את שתי הספרות האחרונות של 5353^{202} .

ב. מצאו את $5773^{862} + 2013 \pmod{80}$.

בהצלחה!