תרגיל:

נתון טור חיובי מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} d_n$ סופי או אינסופי.

מה ניתן לומר על התכנסות הטורים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+nd_n}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+n^2 d_n}$

פתרון:

א. אם $\lim_{n\to\infty} d_n \neq 0$ אז ניתן להשוות את הטור עם הטור ההרמוני המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

מאחר ו- $1 = \lim_{n\to\infty} \frac{nd_n}{1+nd_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d_n}{1+nd_n}}{\frac{1}{n}}$ הטורים מתבדרים ביחד, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+nd_n}$ גם מתבדר.

אם $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, אבל $\lim_{n\to\infty} nd_n \neq 0$ (כלומר סופי שונה מאפס או אינסוף), אז

$\infty > \lim_{n\to\infty} \frac{nd_n}{1+nd_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d_n}{1+nd_n}}{\frac{1}{n}}$, כלומר הגבול עדיין מספר סופי ושוב הטורים מתבדרים ביחד ו-

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+nd_n}$ מתבדר.

אם $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ וגם $\lim_{n\to\infty} nd_n = 0$, אז נשווה את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+nd_n}$ עם הטור המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$.

$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nd_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d_n}{1+nd_n}}{d_n}$ ושוב הטורים מתבדרים ביחד, כלומר גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+nd_n}$ מתבדר.

הערה: בתרגול לא בדקנו את המקרה $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

כנ"ל במקרה ב'

ב. אם $\lim_{n\to\infty} d_n \neq 0$ אז ניתן להשוות את הטור עם הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

מאחר ו- $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d_n}{1+n^2d_n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2d_n}{1+n^2d_n} = 1$ הטורים מתכנסים ביחד, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{1+n^2d_n}$ גם מתכנס.

אם $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, אז קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $d_n<1$ ולכן

$$\frac{d_n}{1+n^2d_n} < \frac{d_n}{d_n+n^2d_n} = \frac{1}{1+n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ מתכנס ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{1+n^2d_n}$ מתכנס.