משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון

תזכורת: מד"ר לינארית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה הבאה:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

כאשר $a(x)$ ו$b(x)$ הן פונקציות אינטגרביליות (כלומר, שקיים להן אינטגרל).
מד"ר לינארית הומוגנית מסדר ראשון היא מד"ר מהצורה

$$y' + a(x)y = 0$$

כלומר, כאשר $b(x) = 0$.
נזכיר איך פתרנו את המקרה ההומוגני:

$$y + a(x)y = 0$$

נכפיל את המשוואה בפונקציה $e^{\int a(x)}$

$$e^{\int a(x)}(y' + a(x)y) = 0$$

$$(e^{\int a(x)}y)' = 0$$

$$e^{\int a(x)}y = c$$

$$y = ce^{-\int a(x)}$$

איך נפתור מד"ר לינארית מסדר ראשון כללית?

$$y' + a(x)y = b(x)$$

נכפיל ב$e^{\int a(x)}$

$$e^{\int a(x)}(y' + a(x)y) = e^{\int a(x)}b(x)$$

$$(e^{\int a(x)}y)' = e^{\int a(x)}b(x)$$

$$e^{\int a(x)}y = \int e^{\int a(x)}b(x)dx + c$$

$$y = e^{-\int a(x)}[\int e^{\int a(x)} b(x)dx + c]$$

דוגמא: פתרו את המד"ר הבאה:

$$y' + 2xy = 8x$$

פתרון: זאת מד"ר לינארית מסדר ראשון, $a(x) = 2x, b(x) = 8x$
$\int a(x) = x^2$

$$y = e^{-x^2}[\int e^{x^2} 8xdx + c]$$

$$\int e^{x^2} 8xdx = 4\int e^{x^2} 2xdx$$

נציב $t = x^2$, $dt = 2xdx$

$$\int e^t dt = e^t$$

לכן

$$\int e^{x^2} 8xdx = 4\int e^{x^2} 2xdx = 4e^{x^2}$$

$$y = e^{-x^2}[4e^{x^2} + c] = 4 + ce^{-x^2}$$

$$y = 4 + ce^{-x^2}$$

נבדוק שצדקנו:

$$y' = c(-2x)e^{-x^2}$$

נציב את זה במד"ר

$$-2xce^{-x^2} + 2x(4 + ce^{-x^2}) \stackrel{?}{=} 8x$$

$$-2xce^{-x^2} + 8x + 2xce^{-x^2} = 8x$$

אכן מתקיים.

(לא חייבים לבדוק)

מד"ר פרידה

מד"ר פרידה היא מד"ר מהצורה הבאה:

$$y' = f(y) \cdot g(x)$$

דוגמאות:
1. $y' = y^2 cos(x)$
2. $y' = e^y(x^2 + 2x)$

דוגמאות נגדיות:
1. $y' = x + y$
2. $y' = x^y$

איך פותרים?

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

סימון מתמטי מקובל.

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

נכנס y ים בצד אחד, וxים בצד שני.
כלומר, נכפיל בdx ונחלק ב$f(y)$.

$$\frac{1}{f(y)}dy = g(x)dx$$

נעשה אינגרל על שני האגפים

$$\int \frac{1}{f(y)}dy = \int g(x)dx$$

זה יתן לנו איזשהו קשר בין y לx.
אם אפשר לחלץ y שווה לביטוי של x- נעשה זאת.
לא תמיד אפשר. ואז נשאיר את זה כשוויון בין שני ביטויים.

דוגמאות:
1. $y' = y^2$

זאת מד"ר פרידה. אפשר להתייחס לזה כ$f(y) = y^2$ ו$g(x) = 1$

$$y' = y^2 \cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot 1$$

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{y} = x + c$$

$$y = -\frac{1}{x+c}$$

פתרון נוסף: $y = 0$. (תכף נדבר על הפתרון הנוסף)

2. $y' = y^2 - 1$

$$f(y) = y^2 - 1, g(x) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int dx$$

עכשיו אנחנו רוצים לחשב את האינטגרל:

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1}$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$$

$$\frac{A(y-1) + B(y+1)}{y^2 - 1} = \frac{1}{y^2 - 1}$$

$$A(y-1) + B(y+1) = 1$$

$$(A + B) = 0$$

$$-A + B = 1$$

$$B = \frac{1}{2}, A = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = -\frac{1}{2(y+1)} + \frac{1}{2(y-1)}$$

$$\int \frac{1}{y^2-1} dy = \int -\frac{1}{2(y+1)} + \frac{1}{2(y-1)} dy$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|y+1| + \frac{1}{2} ln|y-1|$$

לסיכום:

$$-\frac{1}{2} \ln|y+1| + \frac{1}{2} ln|y-1| = x + c$$

פתרון סינגולרי:

שימו לב שבמהלך הדרך אנחנו מחלקים ב$f(y)$. הבעיה היא- מה קורה כאשר הפונקציה הנ"ל שווה ל0?

למקרים ששווים 0 אנחנו מתייחסים בנפרד.

כל מספר t כך ש$f(t) = 0$ נותן "פתרון סינגולרי". שזה הפונקציה $y = t$.

בדוגמא הראשונה $f(y) = y^2$. זה מתאפס כאשר $y = 0$. לכן יש פתרון סינגולרי: $y = 0$.

בדוגמא השניה שלנו $f(y) = y^2 - 1$. זה מתאפס כאשר $y = \pm 1$. ולכן יש לנו שני פתרונות סינגולריים:

$y = 1$

$y = -1$

הערה: אם הביטוי של y לא מתאפס אף פעם אז אין פתרונות סינגולרים.

תרגיל: $y' = 4x(y+1)^2$

פתרון: