לינארית 2 תרגיל 3

1. קבעו איזה מההעתקות הבאות היא העתקה לינארית: (נמקו).
במידה וזאת העתקה לינארית, קבעו: האם היא חח"ע? האם היא על?
א. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ הנתונה ע"י: $T(x,y)=(x-y,2x+3y,0)$.
ב. $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}$ הנתונה ע"י $T(A)=\det A$.
ג.תהי $P\in\mathbb{R}^{3\times 3}$הפיכה. נגדיר $T:\mathbb{R}^{3\times 3}\to\mathbb{R}^{3\times 3}$ ע"י:
, $T(A)=P^{-1}AP$.

פתרון:
א. זאת העתקה לינארית.
הוכחה:
חיבוריות:
יהיו שני וקטורים $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.
$T((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=T(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_1+x_2-y_1+y_2,2x_1+2x_2+3y_1+3y_2,0)=(x_1-y_1,2x_1+3y_1,0)+(x_2-y_2,2x_2+3y_2,0)=T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)$.
כפל בסקלר:
יהי וקטור (x,y) וסקלר α.
$T(\alpha(x,y))=T(\alpha x,\alpha y)=(\alpha x-\alpha y,2\alpha x+3\alpha y,0)=\alpha(x-y,2x+3y,0)=\alpha T(x,y)$.
היא לא על, כי למשל, לכל וקטור ב$\mathbb{R}^3$ שברכיב השלישי יש מס' שונה מ0 אין מקור.
נוכיח שהיא חח"עת ע"י זה שנראה שהגרעין הוא 0ץ
יהי $(x,y)\in\ker T$. כלומר, $T(x,y)=(x-y,2x+3y,0)=(0,0,0)$.
אזי, (x,y) הוא בעצם פתרון למערכת המשוואות :

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$$

קל לראות שהפתרון היחיד הוא וקטור ה0.
ב. זאת לא העתקה לינארית. נוכיח למשל שהיא לא חיבורית.
נקח $A=I,B=-I$.
$|A+B|=|0|=0$.
אולם, $|A|+|B|=1+1=2$.
ג. נוכיח שזאת העתקה לינארית:
חיבוריות: יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$.
$T(A+B)=P^{-1}(A+B)P=P^{-1}AP+P^{-1}BP=T(A)+T(B)$.
כפל בסקלר:
$T(\alpha A)=P^{-1}(\alpha A)P=\alpha P^{-1}AP=\alpha T(A)$.
נוכיח שהיא חח"ע ועל ע"י זה שנמצא לה הופכית.

טענה: הפונקציה $S(A)=PAP^{-1}$ הופכת את T.
הוכחה: $T\circ S(A)=T(PAP^{-1})=P^{-1}PAP^{-1}P=A$.
וכן, $S\circ T(A)=S(P^{-1}AP)=PP^{-1}APP^{-1}=A$.

2. תזכורת: בהינתן פולינום p, p' מסמל את הנגזרת של הפולינום. למשל:

$$(x^2+2x)'=2x+2$$

.

לכל סקלר α, $p(\alpha)$ מסמל הצבה של הסקלר בפולינום. למשל:

$$(x^3+x+5)(1)=1^3+1+5=7$$

.

חשבו את $T\circ S$ עבור:
$S:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$, $S(p)=(p(1),2p'(2))$.
$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(x,y)=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 3x & 5y \end{pmatrix}$.
(כלומר, תנו נוסחא מפורשת להעתקה המתקבלת.)
פתרון:
ראשית נשים לב ש $S(ax^2+bx+c)=(a+b+c,2(2ax+b)(2))=(a+b+c,8a+2b)$.
לכן, $T\circ S(ax^2+bx+c)=T(a+b+c,8a+2b)=\begin{pmatrix} a+b+c & 0 \\ 3a+3b+3c & 40a+10b \end{pmatrix}$.

3. האם קיימת הע"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת
$T(1,0,1)=(2,4)$
$T(0,0,1)=(1,0)$
$T(3,0,2)=(5,12)$.
אם כן, מצאו כזו. האם היא יחידה?
פתרון:
ניתן לראות שיש תלות בין הוקטורים: $(3,0,2)=3(1,0,1)-(0,0,1)$.
אבל אותה תלות מתקיימת גם בין התמונות: $(5,12)=3(2,4)-(1,0)$.
לכן קיימת העתקה כזאת.
כדי למצוא אותה נשלים את $(1,0,1),(0,0,1)$ לבסיס, למשל באמצעות הוקטור $(0,1,0)$.
ממשפט ההגדרה לכל וקטור שנבחר כ $T(0,1,0)$, נקבל העתקה לינארית. אפשר לבחור כל וקטור ב$\mathbb{R}^2$ ולכן יש אינסוף העתקות לינאריות אפשריות.
ניתן דוגמא לאחת:
נבחר $T(0.1.0)=(0,0)$.
נרצה למצוא נוסחא מפורשת ל$T((x,y,z))$.
נשים לב ש:
$(x,y,z)=x(1,0,1)+y(0,1,0)+(z-x)(0,0,1)$.
לכן,
$T(x,y,z)=T(x(1,0,1)+y(0,1,0)+(z-x)(0,0,1))=xT(1,0,1)+yT(0,1,0)+(z-x)T(0,0,1)=x(2,4)+y(1,0)+(z-x)(0,0)=(2x+y,4x)$.

4. הוכיחו:

אם $T: V \to U$ הע"ל חח"ע, ו $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ בת"ל, אזי $\{T(v_1), ..., T(v_n)\} \subseteq U$ בת"ל.

פתרון:

יהי צירוף לינארי מתאפס:

$\alpha_1 T(v_1) + ...\alpha_n T(v_n) = 0$.

מתכונות העתקה לינארית ניתן לחבר ולהכניס סקלרים. לכן:

$T(\alpha_1 v_1 + ...\alpha_n v_n) = 0$.

כלומר, $\alpha_1 v_1 + ...\alpha_n v_n \in \ker T$.

אבל T חח"ע, לכן $\ker T = 0$.

נובע מכך ש $\alpha_1 v_1 + ...\alpha_n v_n = 0$.

אבל נתון ש $\{v_1, ..., v_n\}$ בת"ל, לכן $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

מש"ל.