תרגיל 7

להגשה עד 25.12.17

יהי $(\mathbb{X},\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית.

שאלה 1

נתון כי μ סופית, וכי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה.

הוכיחו כי f אינטגרבילית אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\{x\ :\ f(x)\geq n\}\right)<\infty$.

שאלה 2

תהי $E\in\mathbb{A}$ כך ש: $\mu(E)>0$ וגם: $\mu(\mathbb{X}\setminus E)>0$.

נגדיר סדרה $f_n:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ על ידי: לכל $k\in\mathbb{N}$: $\begin{matrix} f_{2k}:=\mathbf{1}_{E^c} \\ f_{2k-1}:=\mathbf{1}_E\end{matrix}$

הראו כי מקרה זה מהווה דוגמא לאי שוויון חד בלמה של פאטו.

שאלה 3

תהי $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית־μ.

לכל $t\in\mathbb{R}$ נגדיר: $F(t):=\int_X f(x)\cos\left(e^t f(x)\right)d\mu(x)$. הוכיחו כי F רציפה וסופית ב־$\mathbb{R}$.

שאלה 4

יהי $a\in(0,\infty)$, ותהי $f:X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה כך ש: $0<c:=\int_X fd\mu<\infty$. הוכיחו כי:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)d\mu=\begin{cases} c & a=1\\ \infty & 0<a<1\\ 0 & 1<a<\infty\end{cases}.$$

תזכורת: אם $0\leq t$ ו־ $1\leq a$ אז $1+t^a\leq(1+t)^a\leq e^{at}$.

שאלה 5

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות חסומות (כל אחת בנפרד) מ־X ל־$\mathbb{R}$, כך ש: $f_n\to f$ במידה שוה מעל X.

1. הוכיחו כי $\|f\|_U:=\sup_{x\in X}|f(x)|<\infty$ (כלומר: f חסומה ב־ X), וכי $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_U<\infty$.
2. הוכיחו כי אם $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, וכל f_n מדידה־$\mathbb{A}$, ו־ $\mu(X)<\infty$ אז $\int_X f_n d\mu\to\int_X fd\mu$.
3. תנו דוגמא של ממ"ח $(X,\mathbb{A},\mu)$, כך ש: $\mu(X)=\infty$, וסדרת פונקציות מדידות־$\mathbb{A}$: $(f_n)_{\mathbb{N}}$ כך ש־ $f_n\to f$ במידה שוה, אבל $\int_X f_n d\mu\not\to\int_X fd\mu$.

בהנאה :)