1

מד"ר הומוגניות ומשוואות מדויקות

$y'=f(\frac{y}{x})$ משוואה הומוגנית לא לינארית מסדר ראשון

בהינתן משוואה מהצורה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

<u>א.</u> צריך לוודא ש M ו N פונ' הומוגניות מאותו סדר k.

<u>הגדרה:</u> פונ' $f(x,y)$ נקראת הומוגנית מסדר k אם לכל $\lambda>0$ ולכל $(x,y)\in D$ $(D\subseteq\mathbb{R}^2)$ מתקיים:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y)$$

<u>ב.</u> מחלקים ב-dx ונקבל $M+Ny'=0$

$\Leftarrow$ אם $N\neq 0$ $\quad y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$

<u>ג.</u> נחלק מונה ומכנה ב- x^k כאשר k הוא סדר ההומוגניות

שלבים א-ג יובילו למשוואה $y'=f(\frac{y}{x})$ אותה כבר למדנו לפתור.

<u>תרגיל:</u>

$$\begin{cases}(x^2-y^2)dx+2xy\,dy=0\\ y(1)=1\end{cases}$$

<u>א.</u> נבדוק סדר הומוגניות

$$M(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2-(\lambda y)^2=\lambda^2(x^2-y^2)=\lambda^2\cdot M(x,y)$$

$$N(\lambda x,\lambda y)=2\cdot\lambda x\cdot\lambda y=\lambda^2\cdot 2xy=\lambda^2 N(x,y)$$

ואכן M ו-N מאותו סדר הומוגניות 2.

<u>ב.</u> נחלק ב dx ונעביר אגפים $x^2-y^2+2xy\,y'=0$

$$y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

<u>ג.</u> נחלק מונה ומכנה ב- x^2 ונקבל

$$y'=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\frac{y}{x}}$$

נציב $z=\frac{y}{x}$ ... $y(x)=\pm x\sqrt{\left|\frac{c}{x}\right|-1}$

$y(x)=x\sqrt{\frac{2}{x}-1}$ [illegible]

(שמות נרדפים: משוואות פוטנציאל
או משוואה בדיפרנציאל שלם)

משוואה מדויקת

מד״ר מהצורה $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

__הגדרה__: הדיפרנציאל השלם של פונק׳: אם $f(x,y,z)$

הדיפרנציאל השלם $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

כדי לפתור מד״ר מדויקת מחשבים פונ׳ פוטנציאל $u(x,y)$
והפתרון הכללי למד״ר יהיה $u(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.
שכן המשוואה מייצגת דיפרנציאל שלם של u

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \Leftarrow \begin{matrix} M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \\ N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \end{matrix}$$

ואז $du = 0 \Leftarrow u(x,y) = C$.

תנאי הכרחי ומספיק לכך שמשוואה היא מדויקת הוא:
M, N, M_y, N_x רציפות ב-D ומתקיים
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{לכל } (x,y) \in D$$

__תרגיל__: $(\cos y + 1)\,dx + (1 - x\sin y)\,dy = 0$

התנאים לעיל + $M_y = N_x = -\sin y$ מתקיימים ולכן מדויקת

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M = \cos y + 1 \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N = 1 - x\sin y \end{cases}$$

(2)

אפשרות לפתרון המד"ר הוא לעשות אינטגרל לפי x
למשוואה הראשונה, גזירה לפי y והצבה במשוואה השנייה.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y + 1 \qquad / \int (\cdot)\, dx$$

$$u(x,y) = x\cos y + x + f(y)$$

פונ' של y ולא קבוע
מאחר והנגזרת לפי x עדיין 0. (u תלויה בשני משתנים)

נגזור את u לפי y ונציב במשוואה השנייה.

$$u_y = \cancel{-x\sin y} + f'(y) = 1 - \cancel{x\sin y}$$

$$f'(y) = 1 \Rightarrow f(y) = y + C$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \boxed{x\cos y + x + y = C}$$

פתרון המד"ר המדויקת.

<u>גורם אינטגרציה</u> (הפיכת משוואה לא מדויקת למדויקת)

נניח המד"ר $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$
אינה מדויקת. הפונ' M, N, M_y, N_x רציפות בתחום D
אולם $M_y \neq N_x$.
ננסה למצוא פונ' $\mu(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרות
חלקיות ראשונות רציפות בתחום $D_1 \subseteq D$ כך שהמשוואה
$(\mu M)(x,y)\,dx + (\mu N)(x,y)\,dy = 0$ תהיה מדויקת ב D_1.

נרצה $(\mu M)_y = (\mu N)_x$

$$\Rightarrow \mu_y \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu_x \cdot N + \mu \cdot N_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y \cdot M}$$

תנאי כדי לקבל גורם אינטגרציה

כעת נחלק למקרים:

1. $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ כלומר פונ' של x בלבד.

גורם אינטגרציה $\boxed{\mu(x) = e^{\int g(x)dx}}$ במקרה זה

(אין צורך להוסיף קבוע במעריך)

2. $\frac{N_x - M_y}{M} = g(y)$ כלומר פונ' של y בלבד.

גורם אינטגרציה $\boxed{\mu(y) = e^{\int g(y)dy}}$

3. $\frac{M_y - N_x}{y\cdot N - x\cdot M} = h(x\cdot y)$ פונ' של $x\cdot y$ כמשתנה

$$\boxed{\mu(x\cdot y) = e^{\int h(xy)d(xy)}}$$

4. יופיע בתרגיל הבא – למציאת תנאי עבור $\mu(x+y)=f(x+y)$

③

תרגיל: (מציאת גורם אינטגרציה)

(משוואת ברנולי*)

$$y' = y^2 \ln x - \frac{y}{x} \quad , \quad x>0$$

פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \ln x - \frac{y}{x} \qquad /\cdot x$$

$$x\frac{dy}{dx} = xy^2 \ln x - y \qquad /\cdot dx$$

$$(xy^2 \ln x - y)dx - x\,dy = 0$$

נבדוק האם המשוואה מדויקת:

$$M_y = 2xy\ln x - 1 \neq N_x = -1$$

נבדוק לפי המקרים מהו גורם האינטגרציה:

1. $$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2xy\ln x - 1 + 1}{-x} = 2y\ln x \neq f(x)$$

פונ' גם של x וגם של y

2. $$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-1 - 2xy\ln x + 1}{xy^2\ln x - y} = \frac{-2xy\ln x}{y(xy\ln x - 1)} \neq g(y)$$

3. $$\frac{M_y - N_x}{y\cdot N - x\cdot M} = \frac{2xy\ln x - 1 + 1}{y\cdot(-x) - x\cdot(xy^2\ln x - y)} =$$

$$= \frac{2\cancel{x}\cancel{y}\cancel{\ln x}}{-x^2y^2\cancel{\ln x}} = -\frac{2}{x\cdot y} = h(x\cdot y)$$

פונ' של משתנה $x\cdot y$

גילינו שאנו במקרה 3 ולכן גורם האינטגרציה יהיה:

$$\mu(x,y)=\mu(x\cdot y)=e^{\int -\frac{2}{xy}\,d(xy)}=e^{-2\ln|xy|}=$$

$$=e^{\ln(xy)^{-2}}=\boxed{\frac{1}{x^2y^2}}$$

נכפול את המד"ר בגורם האינטגרציה ונקבל:

$$\frac{1}{x^2y^2}\cdot\left(xy^2\ln x-y\right)dx+\frac{1}{x^2y^2}\cdot(-x)\,dy=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x^2y}\right)dx-\frac{1}{xy^2}\,dy=0$$

נבדוק שאכן זו מד"ר מדויקת

$$M_y=\frac{1}{x^2y^2}=N_x=\frac{1}{x^2y^2}$$

רציפות בתחום חד $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\begin{matrix}x>0\\ y\neq 0\end{matrix}\right\}$

גזירה והצבה לפי x

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x^2y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{xy^2}\xrightarrow[\text{לפי } y]{\text{אינטגרל}} u(x,y)=\frac{1}{xy}+C(x)\end{cases}$$

$$u_x=-\frac{1}{x^2y}+C'(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x^2y}\Rightarrow C'(x)=\frac{\ln x}{x}$$

הצבה $\ln x=t$

$$\boxed{C(x)=\frac{\ln^2 x}{2}}$$

$$u(x,y)=\boxed{\frac{1}{xy}+\frac{\ln^2 x}{2}=C}$$

$$\Rightarrow\boxed{y(x)=\frac{2}{Cx-x\ln^2 x}}$$