חדוו"א 2 ־פתרונות לשאלות מבחינות

5 ביולי 2011

נערך על ידי: אורי אלברטון

אזהרה: זוהי הצעת פתרון לשאלות מבחינות קודמות, הפתרונות המופיעים לעיל לא נבדקו על ידי אף גורם מוסמך ועשויים להכיל טעויות, שגיאות חישוב ועוד. (אם במקרה החלטתם לקרוא את הפתרונות ומצאתם טעות כזאת, אשמח לשמוע, $orialb1$ בג'ימייל)

2009 סמסטר ב', מועד מיוחד (קלרטג)

שאלה 1

א) האם האינטגרל $\int_1^\infty e^{-\log^2(x)}\,\mathrm{d}x$ מתכנס?

פתרון: ראשית נשים לב כי הנקודה הבעייתית היחידה הינה ∞, לכן מספיק לבדוק את ההתכנסות של האינטגרל $\int_e^\infty e^{-\log^2(x)}\,\mathrm{d}x$, נבצע חילוף משתנים:

$$\int_e^\infty e^{-\log^2(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} t=\log x & \mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t \\ x=e^t & t:1\to\infty \end{cases} =$$
$$= \int_1^\infty e^t e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty e^{-t(t-1)}\,\mathrm{d}t$$

כאשר מתקיים כי $\varphi(t)=e^t$ הינה פונקציה מונוטונית עולה וגזירה ברציפות ולכן אכן ניתן לבצע החלפת משתנים זו.
עתה נשים לב כי עבור כל $t>e$ מתקיים $t(t-1)\geq t$ ולכן $e^{-t}\geq e^{-t(t-1)}$, מכיוון ששתי הפונקציות הנ"ל חיוביות ניתן להשתמש בקריטריון ההשוואה לפונקציות חיוביות ולהסיק כי:

$$\int_e^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t<\infty \Rightarrow \int_e^\infty e^{-t(t-1)}\,\mathrm{d}t<\infty$$

ואכן מתקיים

$$\int_e^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}(e^{-e}-e^{-b}) = e^{-e}<\infty$$

על כן ניתן להסיק כי האינטגרל המקורי $\int_1^\infty e^{-\log^2(x)}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

ב) נתונה f פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x}f(x)=0$, נניח כי

$$\int_{-\infty}^\infty f^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

יש להוכיח כי

$$\int_{-\infty}^\infty xf'(x)f(x) = -\frac{1}{2}$$

פתרון: נסתכל על $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (x)'f^2(x)\,\mathrm{d}x$, f גזירה ברציפות לכן גם f^2 גזירה ברציפות (מכפלה של פונקציות גזירות ברציפות), כמו כן ברור כי $x'=1$ הינה פונקציה אינטגרבילית, ולכן נוכל לבצע אינטגרציה בחלקים:

$$(\star)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = [bf^2(b)-af^2(a)] - 2\int_a^b xf'(x)f(x)$$

נשים לב כי מהנתון $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x}f(x)=0$ נוכל להסיק כי

$$\lim_{x\to\pm\infty} xf^2(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x}f(x)\sqrt{x}f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x}f(x)\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x}f(x) = 0$$

ולכן מתקיים

$$\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to-\infty}[bf^2(b)-af^2(a)]=0$$

על כן אם ניקח גבול עבור הביטוי $(\star)$ כאשר $a\to-\infty$ ו־$b\to\infty$ נקבל כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x=-2\int_{-\infty}^{\infty}xf'(x)f(x)$$

ומהנתון $\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x=1$ נסיק כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}xf'(x)f(x)=-\frac{1}{2}$$

שאלה 2

נתונה $f:[0,2]\to[0,\infty)$ פונקציה רציפה ואי שלילית, כמו כן נתון כי f קעורה כלומר לכל שתי נקודות $x,y\in[0,2]$ ו־$\lambda\in[0,1]$ מתקיים:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

נניח גם ש־$f(1)=1$, יש להוכיח כי

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\geq 1$$

<u>**פתרון:**</u> נניח כי $t\in[0,1]$ אזי קיים $\lambda=1-t\in[0,1]$ כך ש־ $t=\lambda\cdot 0+(1-\lambda)\cdot 1$, לכן מתנאי הקעירות נקבל:

$$f(t)=f(\lambda\cdot 0+(1-\lambda)\cdot 1)\geq\lambda f(0)+(1-\lambda)f(1)\geq(1-\lambda)f(1)=t$$

(המעבר הלפני אחרון מכיוון ש־f אי שלילית ולכן $f(0)\geq 0$) כלומר קיבלנו שלכל $t\in[0,1]$ מתקיים כי $f(t)\geq t$ לכן נוכל לכתוב:

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\geq\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

זאת על פי טענה שהוכחנו בכיתה לפיה אם $f(t)\leq g(t)$ לכל $t\in[a,b]$ אזי $\int_a^b f\leq\int_a^b g$.
עתה נסתכל על $t\in[1,2]$, אם נבחר $\lambda=2-t$ אזי מתקיים כי $t=\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 2$ ולכן מתנאי קעירות נקבל:

$$f(t)=f(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 2)\geq\lambda f(1)+(1-\lambda)f(2)\geq\lambda f(1)=2-t$$

(כאשר שוב המעבר הלפני אחרון מכיוון ש־f אי שלילית) כלומר קיבלנו שלכל $t\in[1,2]$ מתקיים כי $f(t)\geq 2-t$ ולכן נוכל לכתוב:

$$\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t\geq\int_1^2(2-t)=\frac{1}{2}$$

לכן מתקיים

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)+\int_1^2 f(t)\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

כנדרש.

2008 סמסטר ב', מועד ב' (סודין)

שאלה 1

חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$

פתרון: האינטגרל הנ"ל הינו $\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$, לכן נפתור ראשית את האינטגרל עבור b קבוע באמצעות החלפת משתנים:

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \int_0^b \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^{2x}+1}$$

$$\begin{bmatrix} t=e^x & t:1\to e^b \\ \mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x & \end{bmatrix}$$

$$= \int_1^{e^b} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(e^b)-\arctan(1) = \arctan(e^b)-\frac{\pi}{4}$$

כאשר $\varphi(x)=e^x$ הינה פונקציה מונוטונית עולה, אשר מעבירה את הקטע $[0,b]$ לקטע $[1,e^b]$ ולכן התנאים הנדרשים לביצוע החלפת המשתנים אכן מתקיימים.
לכן קיבלנו כי

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \lim_{b\to\infty}\arctan(e^b)-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

שאלה 2

נתונות פונקציות $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$. נתון כי $f_n \rightrightarrows f$ במ"ש על $[0,1]$ וכי f חסומה בקטע.
הוכיחו כי

$$\sup_{[0,1]} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \sup_{[0,1]} f(x)$$

פתרון: על פי הנתון f חסומה בקטע (נניח $|f|\le M$), לכן מתקיים כי $\sup_{[0,1]} f$ סופי, נסמן אם כן $\sup_{[0,1]} f = S\in\mathbb{R}$.
כמו כן f_n מתכנסת במ"ש ל־f, לכן קיים N_0 כך שלכל $n>N_0$ מתקיים:

$$\forall x\in[0,1]: |f_n(x)-f(x)|<1 \Rightarrow f(x)-1<f_n(x)<f(x)+1$$
$$|f_n(x)|<|f(x)+1|\le|M+1|$$

כלומר החל ממקום מסוים $f_n(x)$ חסומה ולכן $\sup_{[0,1]} f_n$ הינו סופי, נסמן אם כן $\sup_{[0,1]} f_n = S_n\in\mathbb{R}$ לכל $n>N_0$.
עלינו להראות $S_n\to S$. נניח בשלילה כי $S_n \nrightarrow S$, אזי קיים $\varepsilon>0$ וקיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|S-S_n(x)|>\varepsilon$.
כלומר קיימים אינסוף אינדקסים עבורם מתקיים $S>S_n+\varepsilon$ או $S<S_n-\varepsilon$, נניח בה"כ כי קיימים אינסוף אינדקסים כך ש־$S>S_n+\varepsilon$.
מהגדרת הסופרמום קיים $x_0\in[0,1]$ כך ש־$S-\frac{\varepsilon}{2}<f(x_0)<S$. מכך ש־$f_n$ מתכנסת במ"ש ל־f קיים N_* כך ש־

$$\forall n>N_*\forall x\in[0,1]\,|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

בפרט זה נכון עבור x_0, לכן לכל $n>N_*$ מתקיים

$$f_n(x_0)>f(x)-\frac{\varepsilon}{2}>S-\varepsilon$$

מצד שני על פי ההנחה שלנו קיים $n_k>N_*$ עבורו

$$f_{n_k}(x_0)<S_{n_k}<S-\varepsilon<f_{n_k}(x_0)$$

הגענו לסתירה, לכן בהכרח מתקיים $S_n\to S$ ■

שאלה 3

נתון כי טור החזקות $\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ הינו בעל רדיוס התכנסות R.
א) מהו רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^\infty a_nc^nz^n$ ($c\in\mathbb{C}$)?
פתרון: נשים לב שמתקיים $\sum_{n=0}^\infty a_nc^nz^n=\sum_{n=0}^\infty a_n(cz)^n$, כלומר הטור החדש מתקבל מהצבה של cz בטור המקורי. ממשפט אודות רדיוס ההתכנסות אנו יודעים כי הטור המקורי מתכנס לכל $R<|z|$ ולא מתכנס עבור $R>|z|$, לכן הטור החדש מתכנס לכל $R<|cz|$ ולא מתכנס עבור $R>|cz|$.

מכיוון שמתקיים $|cz|=|c||z|$ (נובע מיידית מהצגה פולארית של מספרים מרוכבים) נסיק כי רדיוס ההתכנסות של הטור החדש (עבור $c\neq 0$) הינו:

$$R'=\frac{R}{|c|}$$

במידה ו־$c=0$ אזי הטור החדש הינו טור אפסים ולכן מתכנס לכל $z\in\mathbb{C}$, כלומר במקרה זה $R'=\infty$.

ב) מהו רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n^3z^n$?

<u>פתרון:</u> ע"פ משפט קושי־הדמרד אנו יודעים כי מתקיים $R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{|a_n|}}$ וכן $R'=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{|a_n|^3}}$.

נניח תחילה כי $0<R<\infty$, נסמן $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=L$, כאשר תחת ההנחה שלנו מתקיים $0<L<\infty$ (הסדרה חיובית אז ברור כי גם L אי שלילי).

ממשפט אודות $\limsup$ אנו יודעים כי L הינו $\limsup$ אם ורק אם L הוא גבול חלקי של סדרה b_n וכן לכל $\varepsilon>0$ קיים אינדקס שהחל ממנו מתקיים $b_n<L+\varepsilon$ לכל n, נשתמש בתנאי זה על מנת להראות ש־ $\limsup\sqrt[n]{|a_n|^3}=L^3$.

ראשית מכך ש־L גבול חלקי של $\sqrt[n]{|a_n|}$ קיימת תת־סדרה n_k כך ש־ $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\to L$ עבור תת סדרה זו מתקיים:

$$\lim_{n_k\to\infty}\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|^3}=(\lim_{n_k\to\infty}\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|})^3=L^3$$

לכן L^3 אכן גבול חלקי של $\sqrt[n]{|a_n|^3}$.

עתה יהי $\varepsilon>0$, קיים $\varepsilon'>0$ המקיים $(\varepsilon')^3+3L(\varepsilon')^2+3L^2\varepsilon'<\varepsilon$* וכן קיים N_0 כך שלכל $n>N_0$ מתקיים $\sqrt[n]{|a_n|}<L+\varepsilon'$ (מכיוון ש־L הינו $\limsup$).

לכן לכל $n>N_0$ מתקיים

$$(\sqrt[n]{|a_n|})^3<(L+\varepsilon')^3=L^3+(\varepsilon')^3+3L(\varepsilon')^2+3L^2\varepsilon'<L^3+\varepsilon$$

כלומר הראינו ש־ L^3 אכן מקיים תנאי $\limsup$ עבור $\sqrt[n]{|a_n|^3}$, כלומר $R'=\frac{1}{L^3}=R^3$.

* בהכרח קיים ε' כנדרש מכיוון ש־$f(x)=x^3+3Lx^2+3L^2x=x(x^2+3Lx+3L)$ פונקציה רציפה המקיימת $f(0)=0$ ומכיוון ש־$L>0$ מתקיים $f(x)>0$ לכל $x>0$.

נניח עתה כי $R=\infty$, זה ייתכן אם ורק אם $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=0$, מכיוון שלכל n מתקיים $\sqrt[n]{|a_n|}\geq 0$ נסיק כי במקרה זה 0 הינו הגבול החלקי היחיד של הסדרה ולכן מתקיים $\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$. לכן ברור כי מתקיים $\sqrt[n]{|a_n|^3}=(\sqrt[n]{|a_n|})^3\to 0$. כלומר במקרה זה מתקיים $R'=R=\infty$.

במידה ו־$R=0$, מתקיים $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$, מכיוון ש־$\infty$ גבול חלקי של הסדרה $\sqrt[n]{|a_n|}$ מאותם שיקולים שהובאו לעיל נובע כי הוא גם גבול חלקי של הסדרה $\sqrt[n]{|a_n|^3}$ וברור כי במקרה זה מתקיים $\limsup\sqrt[n]{|a_n|^3}=\infty$. לכן נקבל כי $R'=R=0$.

שאלה 4

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה רציפה, הוכיחו או הפריכו:

א) תהי $E\subset\mathbb{R}^m$ קבוצה פתוחה, אזי המקור $f^{-1}(E)$ גם כן קבוצה פתוחה.

<u>פתרון:</u> הטענה נכונה, נוכיח זאת.

ניזכר בהגדרת המקור $f^{-1}(E)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ f(x)\in E\}$.

על מנת להראות ש־ $f^{-1}(E)$ קבוצה פתוחה מספיק להראות כי לכל $x_0\in f^{-1}(E)$ קיים $r_0>0$ כך ש־$B(x_0,r_0)\subseteq f^{-1}(E)$.

יהי אם כן $x_0\in f^{-1}(E)$, אזי $f(x_0)\in E$. מכיוון ש־ E פתוחה קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$B(f(x_0),\varepsilon)\subseteq E$.

עתה מכיוון ש־f רציפה קיים r_0 כך שלכל $y\in B(x_0,r_0)$ מתקיים $f(y)\in B(f(x_0),\varepsilon)\subseteq E$, כלומר לכל $y\in B(x_0,r_0)$ מתקיים $y\in f^{-1}(E)$.

לכן קיבלנו כי $B(x_0,r_0)\subseteq f^{-1}(E)$ כנדרש.

ב) תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, אזי התמונה $f(E)$ גם כן קבוצה פתוחה.

<u>פתרון:</u> הטענה אינה נכונה. ניקח למשל $f\equiv c\in\mathbb{R}^m$, ברור כי f רציפה על E. אבל מתקיים כי $f(E)=\{c\}$ וזוהי בבירור אינה קבוצה פתוחה, משום שלכל $r>0$ מתקיים $B(c,r)\nsubseteq\{c\}$.

שאלה 5

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה C^1 המקיימת $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

הוכיחו כי f פונקציה קבועה.

<u>פתרון:</u> תהי $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ נקודה כלשהיא. נגדיר מסילה $\gamma(t):[0,1]\to\mathbb{R}^2$ ע"י $\gamma(t)=(tx_0,ty_0)$, זוהי מסילה גזירה המקיימת $\gamma'(t)=(x_0,y_0)$.

עתה נגדיר $g(t):=f\circ\gamma(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ זוהי הרכבה של פונקציות דיפרנציאביליות, לכן על פי כלל השרשרת g גזירה ומתקיים:

$$g'(t)=<\nabla f(\gamma(t)),\gamma'(t)>=<\nabla f(\gamma(t)),(x_0,y_0)>$$

נשתמש במשפט לגרנז' עבור g ונקבל כי קיים $c\in(0,1)$ כך ש־

$$f(x_0,y_0)-f(0,0)=g(1)-g(0)=g'(c)=<\nabla f(\gamma(c)),(x_0,y_0)>$$

כלומר קיבלנו כי

$$f(x_0,y_0)-f(0,0)=x_0\frac{\partial f}{\partial x}(cx_0,cy_0)+y_0\frac{\partial f}{\partial y}(cx_0,cy_0)$$

נכפול את שני האגפים של השוויון הנ"ל ב־$c\neq 0$ ונקבל

$$c[f(x_0,y_0)-f(0,0)]=cx_0\frac{\partial f}{\partial x}(cx_0,cy_0)+cy_0\frac{\partial f}{\partial y}(cx_0,cy_0)=0$$

כלומר קיבלנו כי $f(x_0,y_0)=f(0,0)$ לכל נקודה ב־$\mathbb{R}^2$ ולכן f קבועה. ■

2010 סמסטר ב', מועד א' (ארטשטיין,בן־ארצי)

שאלה 1

א) חשבו את האינטגרל הלא מסוים הבא:

$$\int \frac{x-\arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)}\,\mathrm{d}x$$

<u>**פתרון:**</u>

$$I=\int\tfrac{x-\arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)}\,\mathrm{d}x=\int\tfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\arctan(x)}-\int\tfrac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$$
$$\int\tfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\arctan(x)}=\begin{bmatrix}t=\arctan x\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)}\end{bmatrix}=\int\tfrac{\mathrm{d}t}{t}=\log(t)=\log(|\arctan x|)$$
$$\int\tfrac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}=\int\tfrac{\mathrm{d}x}{x}-\int\tfrac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}=\log|x|-\tfrac{1}{2}\log(1+x^2)$$
$$I=\log(|\arctan x|)+\tfrac{1}{2}\log(1+x^2)-\log|x|+c=\log(|\arctan x|\tfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|})+c)$$

ב) האם האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{x-\arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)}\,\mathrm{d}x$$

מתכנס?

<u>**פתרון:**</u> הנקודות הבעייתיות הן 0 ו־∞ לכן נבדוק בנפרד

$$\int_1^\infty \frac{x-\arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\log(\arctan b\frac{\sqrt{1+b^2}}{b})-\log(\frac{\pi}{4}\sqrt{2})$$

מתקיים

$$\lim_{x\to\infty}\arctan x\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\frac{\pi}{2}$$

לכן האינטגרל מתכנס ב־∞. נבדוק באפס

$$\int_0^1 \frac{x-\arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)}\,\mathrm{d}x=\log(\frac{\pi}{4}\sqrt{2})-\lim_{x\to 0}(\arctan x\frac{\sqrt{1+x^2}}{x})$$

$$\lim_{x\to 0}(\arctan x\frac{\sqrt{1+x^2}}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}=1$$

לכן האינטגרל מתכנס גם ב־0 והאינטגרל $\int_0^\infty\frac{x-\arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

שאלה 3

הראו כי לא קיימת $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות פעמיים כך ש־ $f(x,y)=0$ על מעגל היחידה $\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ וכך שבכל נקודה בתוך עיגול היחידה $\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ מתקיים

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$$

<u>פתרון:</u> נשים לב כי כדור היחידה הסגור הינו קבוצה קומפקטית (זוהי קבוצה סגורה וחסומה ב$\mathbb{R}^2$) ולכן מכיוון ש־f רציפה על כדור היחידה, על פי משפט ווירשטראס f מקבלת מקסימום ומינימום על הכדור, כלומר,

$$\exists m,M\in\bar{B}(0,1)\,s.t\,\forall x\in\bar{B}(0,1):f(m)\le f(x)\le f(M)$$

אם m,M שתיהן על מעגל היחידה אזי נקבל $f(m)=f(M)=0$ ולכן במקרה זה $f\equiv 0$ על כדור היחידה, על כן לכל נקודה בתוך עיגול היחידה מתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ ולכן אכן לא מתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$. נניח אם כן כי לפחות אחת מהנקודות הינה נקודה פנימית בתוך עיגול היחידה, נניח בה"כ כי $M\in B(0,1)$.
ראינו בהרצאה כי אם M נקודת מקסימום מקומית של f אזי מטריצת ההסיאן $\nabla^2 f(M)$ הינה שלילית למחצה, כלומר לא קיימים ערכים עצמיים חיוביים עבור המטריצה, לכן נקבל כי $\det\nabla^2 f(M)\ge 0$ (מכיוון שזוהי מטריצה סימטרית היא דומה למטריצה אלכסונית $diag(\lambda_1,\lambda_2)$ ולכן הדטרמיננטה שלה שווה ל־$\lambda_1\lambda_2\ge 0$ מכך שהמטריצה שלילית למחצה), אבל

$$0\le\det\nabla^2 f(M)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})^2\le\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$$

ולכן גם במקרה זה לא מתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$. על כן לא קיימת פונקציה f כנ"ל.

שאלה 4

א) יהי a מספר לא שלם. על ידי חישוב טור פורייה של $e^{i(\pi-x)a}$ בקטע $[0,2\pi]$ חשבו את הסכום הדו־סופי

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}$$

<u>פתרון:</u> נחשב את מקדמי פוריה של הפונקציה הנ"ל

$$\hat{f}(n)=\frac{e^{i\pi a}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-iax}e^{-inx}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{i\pi a}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(n+a)x}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{i\pi a}}{-i2\pi(n+a)}[e^{-i(n+a)x}]_0^{2\pi}=$$
$$=\frac{ie^{i\pi a}}{2\pi(n+a)}(e^{-i(2\pi n+2\pi a)}-1)=\frac{i}{2\pi(n+a)}(e^{-i\pi a}-e^{i\pi a})=\frac{\sin(\pi a)}{\pi(n+a)}$$

לכן על פי שוויון פרסבל נקבל כי

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|e^{-i(\pi-x)a}|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\sin^2(\pi a)}{\pi^2(n+a)^2}=\frac{\sin^2(\pi a)}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}$$

ב) האם מעבר הגבול הבא נכון או לא (הוכיחו)

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}((\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2})-\frac{1}{a^2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

ע"פ סעיף א' הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}$ מתכנס עבור כל $a\in(0,1)$, מכיוון שזהו טור חיובי אזי הוא מתכנס בהחלט וניתן לשנות את סדר סכימת האיברים בטור, לכן נוכל לכתוב:

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}((\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2})-\frac{1}{a^2})=\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}(\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(n+a)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2})=\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a-n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2})$$

עתה נשים לב כי עבור כל $a\in[0,1]$ מתקיים $\frac{1}{(n+a)^2}\le\frac{1}{n^2}$ וכן $\frac{1}{(a-n)^2}\le\frac{1}{(n-1)^2}$, מכיוון שהטורים $\sum\frac{1}{(n-1)^2}$ ו־$\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנסים, אזי ע"פ M־בוחן של ווירשטראס הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a-n)^2}$ מתכנסים במ"ש בקטע $[0,1]$.
מכיוון שאלה טורים של פונקציות רציפות (החל מ־$n=2$) בקטע אזי הפונקציה הגבולית הינה רציפה ב־$a=0$, כלומר מתקיים

$$\lim_{a\to 0}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a-n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{a\to 0}\frac{1}{(a-n)^2}$$
$$\lim_{a\to 0}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{a\to 0}\frac{1}{(n+a)^2}$$

ולכן הגבול הנ"ל שווה ל-

$$=\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

שאלה 5

הוכיחו כי מתקיים אי השוויון הבא

$$\frac{1}{4(\log 2)^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^{2^n}}$$

<u>**פתרון:**</u> נשים לב שהפונקציה $f(x)=\frac{2^x}{2^{2^x}}=\frac{1}{2^{2^x-x}}$ הינה פונקציה אי שלילית יורדת עבור $x>1$, זאת מכיוון שמתקיים

$$f'(x)=(\frac{2^x}{e^{2^z\log 2}})'=\frac{\log 2\cdot(2^xe^{2^x\log 2})-\log^2 2\cdot(2^x2^xe^{2^x\log 2})}{(e^{2^x\log 2})^2}=\frac{\log 2\cdot(2^xe^{2^x\log 2})[1-2^x\log 2]}{(e^{2^x\log 2})^2}$$

נסתכל על הביטוי $1-2^x\log 2$, עבור כל $x>1$ מתקיים $2^x>2$, כמו כן מכיוון ש- $2^2=4>e$ נקבל כי $\log 2>\frac{1}{2}$ ולכן בסה"כ

$$1-2^x\log 2<1-1<0$$

על כן $f'(x)<0$ לכל $x>1$ ולכן הפונקציה אכן יורדת. נוכל איפוא להשתמש במבחן ההשוואה בין טור לאינטגרל על פיו אם $f(x)$ הינה פונקציה אי שלילית יורדת אזי מתקיים

$$\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\leq\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

נחשב אם כך את האינטגרל $\int_1^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\tfrac{2^x}{2^{2^x}}\,\mathrm{d}x&=\begin{bmatrix}t=2^x & t:2\to\infty\\ dt=\log(2)2^x\,\mathrm{d}x & \end{bmatrix}\\ =\tfrac{1}{\log 2}\int_2^{\infty}\tfrac{\mathrm{d}t}{2^t}&=\begin{bmatrix}u=2^t & u:4\to\infty\\ \mathrm{d}u=\log(2)2^t\,\mathrm{d}t & \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{\log(2)u}\end{bmatrix}\\ =\tfrac{1}{\log^2 2}\int_4^{\infty}\tfrac{\mathrm{d}u}{u^2}&=\tfrac{1}{4(\log 2)^2}\end{aligned}$$

בשני המקרים השתמשנו בפונקציה מונוטונית עולה לשם חילוף המשתנים, ובנוסף כל הפונקציות באינטגרל הנ"ל רציפות ועל כן חילופי המשתנים אכן תקינים.
כלומר קיבלנו כי

$$\frac{1}{4(\log 2)^2}=\int_1^{\infty}\frac{2^x}{2^{2^x}}\,\mathrm{d}x\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^{2^n}}$$

כנדרש.

2010 סמסטר ב', מועד ב' (ארטשטיין)

שאלה 1

חשבו את האינטגרל הלא מסוים הבא $\int\frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.
<u>**פתרון:**</u>

$$\begin{aligned}\int\tfrac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}&=\begin{bmatrix}t=\cos x & \sin x=\sqrt{1-t^2}\\ \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{-\sqrt{1-t^2}}\end{bmatrix}=\\ -\int\tfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}}&=-\int\tfrac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=-\int\tfrac{\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)}=\\ =-\tfrac{1}{2}\int(\tfrac{1}{1-t}+\tfrac{1}{1+t})\,\mathrm{d}t&=-\tfrac{1}{2}[\log(1+t)-\log(1-t)]=\tfrac{1}{2}\log(\tfrac{1-t}{1+t})=\\ =\log(\sqrt{\tfrac{1-\cos x}{1+\cos x}})&=\log(\tfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})})=\log(\tan(\tfrac{x}{2}))\end{aligned}$$

שאלה 2

הראו שטור הפונקציות הבא מתכנס לכל x וכן מגדיר פונקציה גזירה ברציפות על $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{n}})$$

פתרון: ראשית נראה כי הטור מתכנס לכל x(ואף מתכנס במ"ש על כל $\mathbb{R}$), לשם כך נשתמש במבחן לייבניץ להתכנסות טורים במידה שווה.

מבחן לייבניץ: בהינתן טור מתחלף מהצורה $\sum(-1)^n a_n(x)$ המוגדר על D, אם מתקיימים התנאים הבאים:

- $a_n(x)$ מונוטונית יורדת ב־n
- $a_n(x) \rightrightarrows 0$ על D

אזי תחת תנאים אלה הטור מתכנס במ"ש. נבדוק אם כן כי הטור הנדון אכן מקיים את התנאים הנ"ל:

מונוטוניות: נשים לב כי מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{n}} > \frac{x}{\sqrt{n+1}}$$

כמו כן מכיוון ש־$\arctan$ הינה פונקציה עולה מתקיים גם כי

$$\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}}) > \arctan(\frac{x}{\sqrt{n+1}})$$

לכן משני אי השוויונות הנ"ל נובע כי אכן מתקיים כי הסדרה מונוטונית יורדת ב־n:

$$\frac{\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}} > \frac{\arctan(\frac{x}{\sqrt{n+1}})}{\sqrt{n+1}}$$

שאיפה במ"ש ל־0: קל לראות כי הסדרה שואפת נקודתית לאפס שכן $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ וכן לכל x קבוע $\frac{x}{\sqrt{n}} \to 0$ על כן מכיוון ש־$\arctan$ רציפה נקבל כי גם

$$\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}}) \to \arctan(0) = 0$$

ולכן ברור כי מכפלת שני הגורמים $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}})$ שואפת אף היא לאפס. כמו כן מתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$ כי:

$$|\frac{\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}} - 0| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \to 0$$

ולכן השאיפה היא במ"ש. על כן מתקיימים התנאים עבור קריטריון לייבניץ והטור שלנו מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$ ואף במידה שווה.

עתה נראה ש־ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{n}})$ הינה פונקציה גזירה ברציפות, נשתמש במשפט אודות גזירה של סדרת פונקציות שנוסחו:

תהי $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות גזירות ברציפות (אכן במקרה שלנו $f_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{n}})$ פונקציה גזירה ברציפות לכל N כסכום של פונקציות גזירות ברציפות) כמו כן נניח כי:

- קיימת $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש־ $f_n(x) \to f$ נקודתית (הראינו התכנסות במ"ש ל־f עבור כל $x \in \mathbb{R}$)
- סדרת הנגזרות מתכנסת במ"ש $f_n' \rightrightarrows g$.

אזי מתקיים כי $f_n \rightrightarrows f$ וכן $\lim_{n\to\infty} f_n' = f'$ (כבר הראינו), כמו כן מכיוון שסדרת הנגזרות רציפה וההתכנסות היא במ"ש אזי גם הפונקציה הגבולית רציפה כלומר f' רציפה.

לכן על מנת לסיים נותר להראות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ מתכנס במ"ש, נשתמש שוב במבחן לייבניץ.

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$|\frac{1}{n+x^2}| \leq \frac{1}{n} \to 0$$

לכן $\frac{1}{n+x^2}$ מתכנסת במ"ש ל־0. כמו כן קל לראות כי הסדרה הנ"ל יורדת עבור כל x קבוע. לכן טור הנגזרות אכן מתכנס במ"ש וקיבלנו כי הטור המקורי אכן מגדיר פונקציה גזירה ברציפות.

שאלה 3

נתונה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, המקיימת כי עבור כל מסילה רציפה $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, הפונקציה $f\circ\gamma$ רציפה.
הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה, או תנו דוגמא נגדית.
פתרון: נוכיח כי $f(x,y)$ אכן רציפה. נניח בשלילה כי קיימת נקודה $a\in\mathbb{R}^2$ כך ש־f אינה רציפה בנקודה a, כלומר קיים $\varepsilon>0$ כך ש:

$$\forall\delta>0\exists x\in\mathbb{R}^2\, s.t\, x\in B(a,\delta)\,\&\,|f(x)-f(a)|>\varepsilon$$

בפרט נוכל להסיק כי קיימת סדרה של נקודות $x_n\in\mathbb{R}^2$ המקיימת $|f(x_n)-f(a)|>\varepsilon$ לכל n וכן $x_n\in B(a,\frac{1}{n})$.
נגדיר את המסילה הבאה:

$$\gamma(t)=\begin{cases}x_n+(1-nt)(n+1)(x_{n+1}-x_n) & \frac{1}{n}\geq t>\frac{1}{n+1}\\ a & t=0\end{cases}$$

נשים לב שזוהי מסילה רציפה שכן עבור כל הנקודות שאינן 0 קל לראות רציפות ועבור 0 אכן מתקיים כי אם $t<\frac{1}{n}$ אזי בפרט קיים $k\geq n$ כך ש־$\frac{1}{k}\geq t\geq\frac{1}{k+1}$ ולכן מהגדרת המסילה ניתן לראות כי מתקיים

$$||\gamma(t)-x_k||=(1-kt)(k+1)||x_{k+1}-x_k||\leq(1-kt)(k+1)\frac{2}{k}=2(\frac{k+1}{k}-t(k+1))\leq\frac{2}{k}$$

כאשר החסם על $||x_{k+1}-x_k||$ מתקבל מכיוון שעל פי אי שוויון המשולש:

$$||x_k-x_{k+1}||\leq||x_k-a||+||x_{k+1}-a||\leq\frac{2}{k}$$

לכן מכיוון ש־ $x_k\in B(a,\frac{1}{k})$ על פי אי שוויון המשולש נקבל כי $\gamma(t)\in B(a,\frac{3}{k})$.
כלומר $\gamma(t)\to a$ כש־$t\to 0$ ולכן $\gamma(t)$ רציפה גם ב־0.
עתה נשים לב כי $f(\gamma(t))$ אינה פונקציה רציפה ב־a, זאת מכיוון שלכל $\delta>0$ קיימת נקודה $\frac{1}{k}<\delta$ כך שמתקיים

$$|f(\gamma(\frac{1}{k}))-f(\gamma(0))|=|f(x_k)-f(a)|>\varepsilon$$

קיבלנו סתירה לנתון ש־ $f\circ\gamma$ רציפה עבור כל מסילה רציפה. לכן בהכרח מתקיים כי f רציפה.

שאלה 4

א) חשבו

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{2^n})^2\,\mathrm{d}x$$

פתרון: נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{2^n}$, ניתן לראות בקלות שהטור הנ"ל מתכנס במ"ש ב־$\mathbb{R}$ (או ב־$[-\pi,\pi]$) אם נשים לב לכך שלכל $x\in\mathbb{R}$ $|\frac{\sin(nx)}{2^n}|\leq|\frac{1}{2^n}|$ ומכאן נוכל להשתמש ב־M בוחן של ויירשטראס. נראה שמתקיים כי טור פורייה המתאים ל־f הינו הטור המגדיר אותה.
נחשב באמצעות $\sin(mx),\cos(kx)$ ונשתמש בעובדה שאלה פונקציות אורתוגונליות ב־L_2.
הטורים $\sum_n\frac{\sin(nx)\cos(kx)}{2^n},\sum_n\frac{\sin(nx)\sin(mx)}{2^n}$ מתכנסים במ"ש (מאותו שיקול כמו עבור הטור המקורי) ולכן ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר לכן נקבל כי:

$$a_0=\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{2^n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{2^n}=0$$
$$a_m=\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\cos(mx)}{2^n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)\cos(mx)}{2^n}=0$$
$$b_m=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\sin(mx)}{2^n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)\sin(mx)}{2^n}=\frac{1}{2^m}$$

לכן טור פורייה המתאים ל־f (בכתיבה של קוסינוסים וסינוסים) הוא אכן הטור המגדיר את f (יכול להיות שזה ברור ממה שנלמד בכיתה ולא צריך להסביר את זה).
נחשב את המקדמים של טור האקספוננטים $\hat{f}(n)$ באמצעות הקשר:

$$\hat{f}(0)=a_0=0$$
$$\hat{f}(n)=\tfrac{1}{2}(a_n-ib_n)=\tfrac{-i}{2^{n+1}}\quad n>0$$
$$\hat{f}(n)=\tfrac{1}{2}(a_n+ib_n)=\tfrac{i}{2^{n+1}}\quad n<0$$

עתה נוכל להשתמש בשוויון פרסבל על פיו מתקיים

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n\in Z} |\hat{f}(n)|^2$$

ובמקרה שלנו מתקיים

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n})^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{2^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^2)^n} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

ב) נתונה $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ רציפה כך שלכל n שלם מתקיים

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{i(n+\frac{1}{2})x} \,\mathrm{d}x = 0$$

הסיקו כי $f(x)=0$ לכל x.

<u>**פתרון:**</u> נשים לב שאפשר לכתוב את הנתון באופן קצת שונה, כך שמתקיים $\int_0^{2\pi} f(x)e^{i(-n-\frac{1}{2})x} \,\mathrm{d}x = 0$
נסתכל על הפונקציה $g(x)=e^{-i\frac{x}{2}}f(x)$ ונחשב את מקדמי פוריה שלה

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-i\frac{x}{2}}e^{-inx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{i(-n-\frac{1}{2})x} \,\mathrm{d}x = 0$$

כאשר השוויון הנ"ל נכון גם עבור $\hat{g}(0)$ על פי הנתון. לכן טור פוריה המתאים ל־g הינו טור אפסים ובפרט מתכנס בהחלט, מכיוון ש־g רציפה נסיק כי טור פוריה מתכנס לפונקציה g, כלומר $g=0$. לכן קיבלנו

$$e^{-i\frac{x}{2}}f(x) \equiv 0 \Rightarrow |e^{-i\frac{x}{2}}f(x)| = 0 \Rightarrow |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

כנדרש.

שאלה 5

נתונה סדרת פונקציות $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ המקיימת את יחס הרקורסיה $f_{n+1}(x)=\sqrt{xf_n(x)}$. נתון כי $f_1(x)=1$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו כי הסדרה מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,1]$.
<u>**פתרון:**</u> נראה באינדוקציה כי לכל $x\in[0,1]$ הסדרה $f_n(x)$ הינה סדרה מונוטונית יורדת המקיימת $x\ge f_n(x)$.
<u>צעד האינדוקציה:</u> $n=1$ מתקיים $x\le 1=f_1(x)$, $f_2(x)=\sqrt{x}\ge x$ ואכן לכל $x\in[0,1]$ $f_2(x)\le f_1(x)$.
<u>בסיס האינדוקציה:</u> נניח כי הראינו שעבור n מתקיים $f_{n-1}(x)\ge f_n(x)\ge x$ ונראה שנכון גם עבור $f_{n+1}(x)$.
אכן

$$x \le \sqrt{x\cdot x} \le \sqrt{xf_n(x)} = f_{n+1}(x) \le \sqrt{xf_{n-1}(x)} = f_n(x)$$

כנדרש.
לכן לכל $x\in[0,1]$ $f_n(x)$ הינה סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה לכן מתכנסת נקודתית.
מאריתמטיקה של גבולות ומיחס הרקורסיה, אם נסמן $\lim f_n(x)=f(x)$ נקבל כי

$$f(x) = \sqrt{xf(x)} \Rightarrow f(x) = x$$

לכן הראינו התכנסות נקודתית של הסדרה ל־x. עתה מכיוון שמדובר בסדרה מונוטונית יורדת של פונקציות רציפות, המתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה בקטע סגור, ניתן להשתמש במשפט דיני ולהסיק כי ההתכנסות בקטע היא במ"ש.

2007 סמסטר א', מועד א' (אהרונסון)

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
I) **א)** $(\mathbb{R},\rho)$ הינו מרחב מטרי כאשר $\rho(x,y):=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.
<u>**פתרון:**</u> הטענה נכונה, עלינו להוכיח כי ρ אכן מטריקה, כלומר מקיימת סימטריות, חיוביות ואי־שוויון המשולש.
ניתן לראות בקלות $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ וכן $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ לכן נותר להראות אי שוויון המשולש. **(הסתבכתי עם החישובים פה אבל זה נכון)**
ב) אם $f:(a,b)\to\mathbb{R}_+$ רציפה במ"ש ב־(a,b), אזי גם $\frac{1}{f}$ רציפה במ"ש בקטע.

פתרון: הטענה לא נכונה. ניקח לדוגמא את $f(x)=x$, בבירור פונקציה רציפה במ"ש בקטע $(0,1)$, אבל הפונקציה $\frac{1}{x}$ אינה רציפה במ"ש. שכן אם ניקח את הסדרות $x_n=\frac{1}{n}$ ו־$y_n=\frac{1}{n^2}$ מתקיים $|x_n-y_n|\to 0$, אבל

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{1}{1/n^2}-\frac{1}{1/n}|=\lim_{n\to\infty}|n^2-n|=\infty$$

ג) אם $a_n>0$ והטור $\sum a_n$ מתכנס אזי הטור $\sum\sqrt{a_n}$ מתכנס גם כן.
פתרון: הטענה אינה נכונה. ניקח לדוגמא $a_n=\frac{1}{n^2}$.
ד) אם $U\subset\mathbb{R}^2$ פתוחה ו־$\bar{U}=\partial U$ אזי $U=\emptyset$
פתרון: הטענה נכונה. נניח בשלילה כי קיים $x\in U$, אזי מכך ש־U פתוחה קיים r_0 כך ש־ $B(x,r_0)\subset U$, ולכן גם עבור כל n מתקיים $B(x,r_0-\frac{n}{n+1}r_0)\subset B(x,r_0)\subset U$. לכן ברור כי ניתן לבנות סדרת נקודות ב־U המתכנסת ל־x ועל כן x הינה נקודת סגור, כלומר $x\in\bar{U}$, מצד שני x הינה גם נקודה פנימית ולכן $x\in int(U)$. מכיוון שעל פי הגדרה מתקיים $\partial U=\bar{U}\setminus int(U)$ נקבל כי $x\notin\partial U$ בסתירה לנתון $\partial U=\bar{U}$.
לכן לא קיים $x\in U$ ו־$U=\emptyset$.
II) אם (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ו־$f:X\to X$ רציפה, אזי לכל $\delta>0$, $x\in X$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש־ $d(f(x),f(y))<\varepsilon$ לכל $y\in B(x,\delta)$.
פתרון: הטענה נכונה. ניקח $x_0\in X$ ונגדיר

$$g(y)=d(f(x_0),f(y)):X\to\mathbb{R}$$

זוהי פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית (כהרכבה של רציפות + ניתן לראות מידית מההגדרה כי פונקציית המרחק היא רציפה) ולכן על פי משפט ווירשטראס $g(y)$ חסומה. כלומר

$$\forall y\in X:g(y)<M$$

לכן עבור כל $x,y\in X$ מתקיים

$$d(f(x),f(y))\le d(f(x_0),f(y))+d(f(x_0),f(x))=g(y)+g(x)<2M$$

בפרט מתקיים לכל $\delta>0$ ולכל $y\in B(x,\delta)$.
III) נגדיר עבור $n\ge 1$ פונקציות $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$ ע"י $f_n(x):=\frac{nx^2}{nx^2+1}$, אזי קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש־$f_n\rightrightarrows f$ במ"ש ב־$[-1,1]$.
פתרון: הטענה אינה נכונה. נבדוק ראשית התכנסות נקודתית, עבור $x\neq 0$ קבוע מתקיים

$$f_n(x)=\frac{nx^2}{nx^2+1}=\frac{x^2}{x^2+\frac{1}{n}}\underset{n\to\infty}{\to}1$$

לכן

$$f_n(x)\to\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

אילו ההתכנסות הייתה במ"ש, אזי מכיוון שהסדרה הינה סדרת פונקציות רציפות היינו בהכרח מקבלים כי הפונקציה הגבולית הינה רציפה. מכיוון שהפונקציה הגבולית אינה רציפה לא ייתכן כי ההתכנסות במ"ש.

שאלה 2

א) יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי, ותהי $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, הוכיחו את משפט ווירשטראס: קיים $m\in X$ כך ש־ $f(x)\le f(m)$ לכל $x\in X$.
הוכחה: נראה ראשית כי התמונה של f, $f(X)\subset\mathbb{R}$ הינה קבוצה קומפקטית.
תהי אפוא סדרה $y_n\in f(X)$, אזי קיימת סדרה $x_n\in X$ המקיימת $f(x_n)=y_n$.
X קבוצה קומפקטית ולכן קיימת תת סדרה מתכנסת של x_n , $x_{n_k}\to z$. כאשר מקומפקטיות גם $z\in X$, ולכן $f(z)\in f(X)$.
מכיוון ש־f רציפה מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}f(x_{n_k})=f(\lim_{n\to\infty}x_{n_k})=f(z)$, אבל $f(x_{n_k})=y_{n_k}$ ולכן מצאנו תת סדרה מתכנסת של y_n כאשר ההתכנסות לאיבר ב־$f(X)$. כלומר, על פי ההגדרה $f(X)$ קבוצה קומפקטית.
עתה מכיוון ש־$f(X)$ קבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{R}$ אזי היא סגורה וחסומה, כלומר קיים $\sup f(X)\in f(X)$, לכן קיים $m\in X$ כך ש־ $f(m)=\sup f(X)$, כנדרש.
ב) יהי $\Omega:=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. נגדיר $d:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ ע"י

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ (\frac{1}{2})^{t(x,y)} & x\neq y\end{cases}$$

כאשר $t(x,y) := \min\{n \geq 1 : x_n \neq y_n\}$ עבור $x \neq y$.
הוכיחו כי (Ω, d) הינו מרחב מטרי קומפקטי.
פתרון: ראשית עלינו להראות כי $d(x,y)$ אכן מטריקה. קל לראות כי $d(x,y) = d(y,x)$ וכן כי $d(x,y) = 0$ אם ורק אם $x = y$.
נותר להראות כי מתקיים אי שוויון המשולש.
יהיו אפוא $x,y,z \in \Omega$, עלינו להראות $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. אם $x = z$ אזי $d(x,z) = 0$ וסיימנו, לכן נניח $x \neq z$ ו־$t(x,z) = n_1$.
נסתכל עתה על $d(x,y)$ אם $x = y$ אזי מתקיים שוויון $d(x,z) = d(y,z)$, לכן נניח כי $x \neq y$ ו־ $t(x,y) = n_2$.
אם $n_1 \leq n_2$ אזי מתקיים כי $t(x,z) = t(y,z)$ ולכן $d(x,z) = d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
אם $n_1 > n_2$ אזי מתקיים כי $d(x,z) < d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
ראינו שבכל מקרה מתקיים אי־שוויון המשולש ועל כן Ω אכן מטריקה.
נראה ש־(Ω, d) קבוצה קומפקטית על ידי כך שנראה כי לכל סדרה $\{a_n\} \subset \Omega$ יש תת סדרה מתכנסת לאיבר ב־Ω.
תהי איפוא $\{a_n\} \subset \Omega$ סדרה, נבנה תת סדרה שלה באמצעות התהליך האינדוקטיבי הבא **(לא בטוח שזה כתוב טוב אבל זה הרעיון הכללי)**:
__צעד 1:__ נשים לב שלמעשה מתקיים

$$a_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, ..., a_n^{(k)}, ...)$$

נסתכל על $a_n^{(1)}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $a_n^{(1)} \in \{0,1\}$, לכן קיימים אינסוף אינדקסים n_k כך ש־ $a_{n_k}^{(1)} = 0$ או $a_{n_k}^{(1)} = 1$.
אם קיימים אינסוף אינדקסים כך ש־ $a_{n_k}^{(1)} = 0$, נבחר את תת סדרה זאת של אינדקסים ונסמנה את האינדקסים שלה ב־ n^1, אחרת נבחר את תת הסדרה $a_{n_k}^{(1)} = 1$ ונסמן את האינדקסים שלה באותו האופן. נסמן $L^{(1)} = 0$ או $L^{(1)} = 1$ בהתאם לבחירתנו.
__צעד i:__ נניח שבנינו תת ־סדרה $a_{n^{i-1}}$, המקיימת $\forall n^{i-1} \forall 1 \leq k \leq i-1 : \ a_{n^{i-1}}^{(k)} = L^{(k)}$.
נבנה תת־סדרה של $a_{n^{i-1}}$ באופן דומה לצעד הראשון, כלומר מכיוון שמתקיים

$$\forall n^{i-1} : a_{n^{i-1}}^{(i)} \in \{0,1\}$$

בהכרח קיימת תת־סדרה $a_{n_m^{i-1}}$ המקיימת $a_{n_m^{i-1}}^{i} = 0$ או תת־ סדרה המקיימת $a_{n_m^{i-1}}^{i} = 1$, נבחר את תת הסדרה הנ"ל (אם שתיהן קיימות נבחר את $a_{n_m^{i-1}}^{i} = 0$) ונסמן את האינדקסים של תת־הסדרה החדשה n^i וכן $L^{(i)} = 0$ או $L^{(i)} = 1$ בהתאמה.
באמצעות תהליך זה אנו מקבלים תת סדרה של a_n, a_{n_k} שהינה למעשה תת־סדרה קבועה מכיוון שמתקיים

$$\forall n_k \forall i \in \mathbb{N} : a_{n_k}^{i} = L^{(i)}$$

ברור שזוהי תת־סדרה מתכנסת, שגבולה הוא הסדרה $L^{(i)} \in \Omega$.

שאלה 3

א) הוכח כי $\frac{\sin(yt)}{y} \rightrightarrows t$ במ"ש כאשר $y \to 0^+$, ב־$t \in [0,R]$ לכל $R > 0$.
פתרון: נסתכל על ההפרש בין f_y ל־t, מתקיים

$$\forall t \in [0,R] : |t - \frac{\sin(yt)}{y}| = |t||1 - \frac{\sin(yt)}{yt}| \leq R|1 - \frac{\sin(yt)}{yt}|$$

עתה מתקיים כי $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־

$$0 < x < \delta \Rightarrow |1 - \frac{\sin(x)}{x}| < \varepsilon$$

לכן בפרט קיים עבור $\frac{\varepsilon}{R}$, $\delta > 0$ כנ"ל, ולכן עבור כל $y < \frac{\delta}{R}$:

$$\forall t \in [0,R] : 0 < yt < \delta \Rightarrow R|1 - \frac{\sin(yt)}{yt}| < R\frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon$$

מכיוון ש־εקטן כרצוננו ואי השוויון הנ"ל נכון לכל t בקטע, ההתכנסות בקטע $[0,R]$ היא אכן במ"ש.
ב) הוכיחו כי

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{|\sin(yt)|}{y}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \underset{y \to 0^+}{\to} \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

נראה ראשית כי

$$f_y(t)=\sqrt{\frac{|\sin(yt)|}{y}}\frac{1}{1+t^2}\rightrightarrows\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}=f$$

נסתכל על ההפרש $|f_y(t)-f(t)|$, מתקיים

$$\forall t\in[0,R]:\ |f_y(t)-f(t)|=|\sqrt{\frac{|\sin(yt)|}{y}}\frac{1}{1+t^2}-\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}|=$$
$$=|\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}||1-\sqrt{\frac{|\sin(yt)|}{yt}}|\le|\sqrt{R}||1-\sqrt{\frac{|\sin(yt)|}{yt}}|$$

כפי שהראינו בסעיף א', עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $y<\frac{\delta}{R}$ מתקיים $|1-\sqrt{\frac{|\sin(yt)|}{yt}}|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{R}}$ (כי גם $\sqrt{\frac{|\sin(yt)|}{yt}}\underset{y\to0^+}{\to}1$ מאריתמטיקה של גבולות) ולכן מתקיים כי

$$\forall y<\frac{\delta}{R}\forall t\in[0,R]:|f_y(t)-f(t)|<\varepsilon$$

על כן ההתכנסות אכן במ"ש בכל קטע סופי.
כמו כן כן מכיוון שעבור כל $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים $\sin x\le x$ נקבל כי עבור כל $y<\frac{\pi}{2R}$

$$\sqrt{\frac{|\sin(yt)|}{y}}\frac{1}{1+t^2}\le\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$$

עתה החל מ־$t>1$ מתקיים כי

$$\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\le\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

ומכיוון שהאינטגרל $\int_1^\infty\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס נקבל על פי השוואת פונקציות חיוביות כי גם האינטגרל $\int_1^\infty\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$ מתכנס.
לכן נוכל להסיק כי האינטגרל $\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$ אף הוא מתכנס, כיוון ש־0 אינה נקודה בעייתית עבור $\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$.
על כן נוכל להשתמש במשפט הבא אודות התכנסות אינטגרלים:
תהי $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות אשר מקיימת כי f_n אינטגרבילית בכל $[0,R]$ סופי (החל מ־n מסוים), כמו כן נניח כי מתקיימים התנאים הבאים:

- $f_n\rightrightarrows f$ מתכנסת במ"ש על כל קטע סגור וסופי $[0,R]$.
- קיימת $\psi>0$, המקיימת $\int_0^\infty\psi<\infty$ וכן $f_n(t)<\psi(t)$ לכל n (החל ממקום מסוים).

אזי האינטגרל $\int_0^\infty f$ מתכנס וכן מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n=\int_0^\infty f$$

הראינו כי מתקיימים כל התנאים הנדרשים במשפט הנ"ל ועל כן נסיק כי

$$\int_0^\infty\sqrt{\frac{|\sin(yt)|}{y}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\underset{y\to0^+}{\to}\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

ג) מצאו כל $0<a,b<1$ כך שעבורם מתקיים:

$$\exists\lim_{y\to0^+}\int_0^\infty\frac{y^a|\sin x|^b}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

<u>**פתרון:**</u> נשים לב כי מתקיים

$$\lim_{y\to0^+}\int_0^\infty\frac{y^a|\sin x|^b}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to0^+}\int_0^\infty\frac{1}{y^{2-a}}\frac{|\sin x|^b}{1+(\frac{x}{y})^2}\,\mathrm{d}x\begin{bmatrix}x=yt & t:0\to\infty\\ \mathrm{d}x=y\,\mathrm{d}t & \end{bmatrix}$$
$$=\lim_{y\to0^+}\int_0^\infty\frac{|\sin yt|^b}{y^{1-a}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{y^{1-a-b}}\int_0^\infty(\frac{|\sin yt|}{y})^b\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=$$

נסתכל על הביטוי $\int_0^\infty (\frac{|\sin yt|}{y})^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, בדיוק באותו האופן שבו הראינו בסעיף ב' עבור $b = \frac{1}{2}$, ניתן להראות כי $(\frac{|\sin yt|}{y})^b \rightrightarrows t^b$ (לא נחזור על ההוכחה לכך בסעיף זה, ניתן פשוט להחליף את השורש בהוכחה בסעיף הקודם בחזקת $0 < b < 1$).
כמו כן משיקולים דומים לאלה שבסעיף הקודם מתקיים כי

$$(\frac{|\sin yt|}{y})^b \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{t^b}{1+t^2}$$

וכן מאותם שיקולים מתקיים, עבור כל $0 < b < 1$, כי

$$\int_0^\infty \frac{t^b}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \infty$$

לכן על פי המשפט מסעיף ב' מתקיים כי $0 < \int_0^\infty (\frac{|\sin yt|}{y})^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} < \infty$ (מדובר בפונקציה רציפה ואי שלילית, שונה מפונקצית האפס, ולכן האינטגרל גדול מאפס).
נסמן אם כך $\int_0^\infty (\frac{|\sin yt|}{y})^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = L(b) \in (0,\infty)$, ונוכל לכתוב:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0^+} \int_0^\infty \frac{y^a|\sin x|^b}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^{1-a-b}} \lim_{y\to 0^+} \int_0^\infty (\frac{|\sin yt|}{y})^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= L(b) \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^{1-a-b}}\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נכון על פי אריתמטיקה של גבולות, ומכיוון שבכל מקרה קיים הגבול $\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^{1-a-b}}$(במובן הרחב) ומתקיים:

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^{1-a-b}} = \begin{cases} 1 & a+b=1 \\ 0 & a+b>1 \\ \infty & a+b<1 \end{cases}$$

לכן ניתן לראות כי הגבול אודותיו נשאלנו, הינו גבול סופי וחיובי רק עבור $0 < a,b < 1$ אשר מקיימים:

$$a+b=1$$

שאלה 4

א) מצא את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^\infty \binom{3n}{n} x^n$
__פתרון:__ נשתמש במשפט קושי־הדמרד על פיו מתקיים כי

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{a_n}$$

נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{n}}$, לשם כך נעזר בטענה מחדו"א 1 על פיה אם קיים הגבול $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אזי גם הגבול $\lim \sqrt[n]{a_n}$ קיים ושווה לו.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{3n+1}{n+1}}{\binom{3n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)!n!(2n)!}{(3n)!(2n+2)!(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} = \frac{27}{4}$$

לכן רדיוס ההתכנסות $R = \frac{4}{27}$.
ב) בדוק התכנסות הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n+n}{n^2}$.
__פתרון:__ נשים לב כי האיבר הכללי של הטור הינו אי שלילי ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה. מתקיים כי

$$\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n+n}{n^2}$$

נסתכל על הטור החיובי $\sum_{n=1}^\infty \frac{n-1}{n^2}$ ונשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{n}$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

לכן הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו, מכיוון שהטור ההרמוני מתבדר גם הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{n-1}{n^2}$ מתבדר.
על כן ממבחן ההשוואה גם הטור המקורי מתבדר.

שאלה 5

א) תהי $U \subset \mathbb{R}^d$ קבוצה פתוחה, $f : U \to \mathbb{R}$ ו־ $\gamma : [0,1] \to U$ פונקציות גזירות ברציפות.
הוכיחו כי $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ גם היא גזירה ברציפות.
<u>**פתרון:**</u> תהי $t_0 \in [0,1]$, מהנתון אודות גזירות γ מתקיים

$$\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) = h \cdot \gamma'(t_0) + o(|h|) \in \mathbb{R}^d$$

מהנתון אודות דיפרנציאביליות של f מתקיים כי

$$f(\gamma(t_0+h)) - f(\gamma(t_0)) =< \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) > +o(||\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)||)$$

לכן

$$(f\circ\gamma)'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma(t_0+h)) - f(\gamma(t_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(< \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) > +o(||\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)||)) =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((< \nabla f(\gamma(t_0)), h\cdot\gamma'(t_0) + o(|h|) > +o(||\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)||)) =$$
$$= \lim_{h\to 0}(< \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) > + < \nabla f(\gamma(t_0)), \frac{1}{h}o(|h|) > + \frac{o(||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||)}{h})$$

מאי שוויון קושי שוורץ נקבל

$$| < \nabla f(\gamma(t_0)), \frac{1}{h}o(|h|) > | \leq ||\nabla f(\gamma(t_0))|| \cdot ||\frac{o(|h|)}{h}|| \underset{h\to 0}{\to} 0$$

כמו כן מתקיים

$$\frac{o(||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||)}{h} = \frac{o(||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||)}{||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||}\frac{||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||}{h}$$
$$= \frac{o(||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||)}{||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||}\frac{||h\cdot\gamma'(t_0)+o(|h|)||}{h} \leq \frac{o(||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||)}{||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||}(||\gamma'(t_0)|| + ||\frac{o(|h|)}{h}||$$

כאשר המעבר האחרון מאי־שוויון המשולש.
מכיוון ש־γ רציפה מתקיים $||\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)|| \underset{h\to 0}{\to} 0$, כמו כן $||\gamma'(t_0)||$ קבוע ו־ $||\frac{o(|h|)}{h}|| \underset{h\to 0}{\to} 0$, כך שקיבלנו

$$\frac{o(||\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)||)}{h} \underset{h\to 0}{\to} 0$$

לסיכום, קיבלנו כי הנגזרת של $f\circ\gamma$ בנקודה t_0 קיימת ומתקיים

$$(f\circ\gamma)'(t_0) =< \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) >$$

לכן $f\circ\gamma$ גזירה בקטע, מכך ש־ $\nabla f(x)$ ו־ $\gamma'(t)$ רציפות נקבל גם כי $(f\circ\gamma)'(t)$ כמכפלה פנימית של פונקציות רציפות.
ב) תהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

האם f דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$?
<u>**פתרון:**</u> קל לבדוק כי הנגזרות החלקיות של f בראשית קיימות ומתקיים

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

אנו יודעים כי אם f דיפרנציאבילית אזי בהכרח מתקיים $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0))$, וכן על פי הגדרת הדיפרנציאביליות מתקיים

$$f(x,y) = f(0,0) + < \nabla f(0,0), (0,0) > +o(\sqrt{x^2+y^2}) = o(\sqrt{x^2+y^2})$$

כלומר על מנת לבדוק דיפרנציאביליות עלינו לבדוק האם אכן

$$f(x,y) \stackrel{?}{=} o(\sqrt{x^2+y^2})$$

נבדוק זאת:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^4+y^2\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^5\cos^3\theta\sin^2\theta}{r^3(r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^3\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta} = 0$$

כאשר המעבר האחרון נכון עבור $\sin\theta \neq 0$, ועבור $\sin\theta = 0$ מתקיים ממילא $f(x,y)=0$ לכל r.
כלומר $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ ולכן f אכן דיפרנציאבילית בראשית.

שאלה 6

א) יהיו הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin(b^nx)}{a^n}$ מתכנס במ"ש על $\mathbb{R}$ וכי הפונקציה $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $w(x) := \sum_{n=0}^\infty \frac{\sin(b^nx)}{a^n}$ הינה גזירה ברציפות.
<u>פתרון:</u> נשתמש במשפט אודות גזירות טורים, אשר נוסחו:
יהי $\sum a_n(x)$ טור של פונקציות $a_n(x): I\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות, כמו כן נניח כי:

- קיימת נקודה x_0 כך שהטור $\sum_{n=0}^\infty a_n(x_0)$ מתכנס.
- טור הנגזרות $\sum_{n=0}^\infty a_n'(x)$ מתכנס במ"ש לפונקציה g.

אזי מתקיים כי הטור $\sum a_n(x)$ מתכנס במ"ש וכן $(\sum_{n=0}^\infty a_n(x))' = \sum_{n=0}^\infty a_n'(x)$.
נראה שהתנאים הנ"ל מתקיימים עבור הטור $w(x)$, אכן עבור x_0 מתקיים $\sin(b^nx_0)=0$ ולכן הטור הינו טור אפסים ובפרט מתכנס.
נסתכל על טור הנגזרות שהינו $\sum_{n=0}^\infty \frac{b^n}{a^n}\cos(b^nx)$, נראה שטור זה מתכנס במ"ש באמצעות M- בוחן של ויירשטראס, אכן מתקיים:

$$\forall x\in\mathbb{R}\forall n\geq 0: |\frac{b^n}{a^n}\cos(b^nx)| \leq (\frac{b}{a})^n$$

מכיוון שמתקיים $\frac{b}{a}<1$ אזי הטור $\sum_{n=0}^\infty (\frac{b}{a})^n$ הינו טור הנדסי מתכנס, ולכן על פי M-בוחן גם טור הנגזרות מתכנס בהחלט ובמידה שווה.
לכן על פי משפט הגזירות מתקיים כי הטור $\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin(b^nx)}{a^n}$מתכנס במ"ש על $\mathbb{R}$ וכן כי נגזרת הפונקציה $w(x)$ הינה $w'(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{b^n}{a^n}\cos(b^nx)$.
הנגזרת אכן רציפה מכיוון שמדובר בטור של פונקציות רציפות שמתכנס במ"ש ולכן ההתכנסות היא לפונקציה רציפה.
ב) האם האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^4}\,\mathrm{d}x$ מתכנס?
<u>פתרון:</u> הנקודה הבעייתית היחידה הינה ∞ לכן מספיק לבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty e^{-x^4}$. נשים לב כי עבור כל $x>1$ מתקיים:

$$e^{x^4} \geq x^4 \Rightarrow e^{-x^4} \leq \frac{1}{x^4}$$

(ניתן לראות זאת למשל מכך ש- $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$) לכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה לפונקציות חיוביות (בבחינה כדאי לנסח את מבחן ההשוואה במלואו).
מתקיים כי:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = [-\frac{1}{3x^3}]_1^\infty = \frac{1}{3} < \infty$$

ולכן נסיק כי גם האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^4}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

2007 סמסטר א', מועד ב' (אהרונסון)

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
I) **א)** אם $f:(a,b)\to\mathbb{R}_+$ רציפה במ"ש ב- (a,b), אזי גם $\frac{1}{1+f}$ רציפה במ"ש ב-(a,b).
<u>פתרון:</u> הטענה נכונה. יהי $\varepsilon>0$, אזי מרציפות במ"ש של f קיימת $\delta>0$ כך ש- $\forall x,y\in(a,b): |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
לכן לכל $|x-y|<\delta$ מתקיים:

$$|\frac{1}{1+f(x)} - \frac{1}{1+f(y)}| = |\frac{f(y)-f(x)}{(1+f(x))(1+f(y))}| \leq |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

(כאשר המעבר הלפני אחרון נכון מכיוון ש־ $f(x), f(y) \geq 0$.
ב) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ מתכנס. **הטענה נכונה**
ג) אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum a_n^4$ מתכנס. **הטענה אינה נכונה** למשל עבור $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$.
II) אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה, אזי לכל $\delta > 0$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$ עבורם $|y - x| < \delta$.
הטענה אינה נכונה למשל עבור $f = e^x$.
III) הגרף $A = \{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq 1\}$ הינה קבוצה סגורה ב־$\mathbb{R}^2$ כאשר $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ עבור $0 < x \leq 1$ ו־$f(0) := 0$.
<u>פתרון:</u> הטענה נכונה, נוכיח זאת.
תהי סדרת נקודות מתכנסת $(x_n, \sin(\frac{1}{x_n})) \in A$, סדרת נקודות מתכנסת אם ורק אם יש התכנסות בכל אחת מהקואורדינטות ומכיוון ש־$[0,1]$ קטע סגור מתקיים $\lim x_n \in [0,1]$.
נשים לב כי לא ייתכן שסדרת הנקודות מתכנסת ומתקיים $x_n \to 0$, זאת מכיוון שלא קיים הגבול $\sin(\frac{1}{x_n})$ כאשר x_n שואף לאפס, ומכיוון שאנו דורשים שסדרת הנקודות תהיה מוכלת כולה ב־A לא קיימת סדרה מתכנסת מסוג זה.
לכן בהכרח מתקיים $\lim x_n \in (0,1]$. מכיוון ש־$f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ פונקציה רציפה בקטע $(0,1]$, נסיק כי $\lim \sin(\frac{1}{x_n}) = \sin(\frac{1}{x})$.
כלומר קיבלנו כי גבול הסדרה הוא בהכרח מהצורה $(x, \sin(\frac{1}{x}))$ עבור $x \in (0,1]$ ולכן מתקיים כי $\lim(x_n, \sin(\frac{1}{x_n})) \in A$.
מכאן נסיק שהקבוצה מכילה את כל נקודות הגבול שלה ולכן זוהי קבוצה סגורה.

שאלה 2

א) נניח כי $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ סידרה של פונקציות גזירות המקיימות $|f_n'(x)| \leq 3$ לכל $x \in [0,1]$ ו־$n \geq 1$. נניח גם כי לכל $x \in [0,1]$ קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: L(x)$.
הוכיחו כי

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - L(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

<u>פתרון:</u> יהי $\varepsilon > 0$. נראה כי קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ ולכל $x \in [0,1]$ מתקיים $|f_n(x) - L(x)| < \varepsilon$.
ראשית נראה לכל $x \in [0,1]$ קיימת סביבה $u_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ ואינקדס N_x כך שמתקיים

$$\forall n > N_x \forall y \in u_x : |f_n(y) - L(y)| < \varepsilon$$

מתקיים

$$|f_n(y) - L(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - L(x)| + |L(x) - L(y)|$$

על פי משפט לגרנז' מתקיים

$$|f_n(y) - f_n(x)| = |x - y||f_n'(c)| \leq 3\delta$$

אי־ השוויון הנ"ל נשמר במעבר לגבול ולכן מתקיים גם כי

$$|L(x) - L(y)| \leq 3\delta$$

כמו כן מהתכנסות נקודתית קיים N_x כך שלכל $n > N_x$ מתקיים

$$|f_n(x) - L(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

לכן עבור $\delta = \frac{\varepsilon}{9}$ נקבל

$$|f_n(y) - L(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - L(x)| + |L(x) - L(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

עתה נשים לב כי מתקיים $[0,1] = \bigcup_{x\in[0,1]} u_x$, זהו כיסוי פתוח של קטע סגור, ועל פי משפט היינה בורל קיים עבורו תת כיסוי סופי.
כלומר קיימים $x_1, .., x_n \in [0,1]$ כך שמתקיים

$$[0,1] = \bigcup_{k=1}^{n} u_{x_k}$$

נבחר $N_0 = \max\{N_{x_k}\}$ (זוהי קבוצה סופית לכן קיים איבר מקסימלי) ונקבל כי מתקיים

$$\forall n > N_0 \forall y \in [0,1]: \ |f(y) - L(y)| < \varepsilon$$

כנדרש.
ב) הוכח כי לכל $R > 0$ מתקיים

$$\int_{-R}^{R} (1 - \frac{x^2}{n})^n \, \mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\to} \int_{-R}^{R} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

__פתרון:__ ראשית נראה כי $f_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^n \rightrightarrows e^{-x^2}$ בקטע $[-R, R]$.
אנו יודעים כי קיימת התכנסות נקודתית $f_n(x) \to e^{-x^2}$. כמו כן נשים לב כי מתקיים

$$f_n'(x) = \frac{-2x}{n} n (1 - \frac{x^2}{n})^{n-1}$$

לכן החל מ־$n > R^2$ מתקיים $|(1 - \frac{x^2}{n})^{n-1}| \leq 1$ ולכן לכל $x \in [-R, R]$:

$$|f_n'(x)| \leq 2R$$

נוכל אם כך להשתמש בטענה שהוכחנו בסעיף א' (כמובן שאין זה משנה אם החסם הוא 3 או $2R$) ולקבוע כי אכן $f_n(x) \rightrightarrows e^{-x^2}$.
לכן על פי משפט אינטגרציה של סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש, ומכיוון ש־$f_n(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע לכל n נוכל לקבוע כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-R}^{R} (1 - \frac{x^2}{n})^n \, \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{x^2}{n})^n \, \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

שאלה 3

א) נתונה $f: [0, \infty)$ פונקציה רציפה וכן ידוע כי $\int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}x = \infty$ הוכיחו כי גם

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t} \, \mathrm{d}x$$

__פתרון:__ נסמן $F(x) := \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$, מכיוון ש־$f(x) > 0$ ורציפה אנו יודעים כי $F(x) > 0$ לכל $x \in [1, \infty)$ ולכן הנקודה הבעייתית היחידה באינטגרל הנ"ל הינה 1.
כמו כן מכיוון ש־$f(x)$ רציפה, ע"פ משפט שהוכחנו בכיתה אודות גזירות האינטגרל עבור כל $x \in [1, \infty)$ מתקיים כי $F'(x) = f(x)$.
על כן נשים לב כי מתקיים גם $(\log(F(x)))' = \frac{f(x)}{F(x)}$, נשתמש אם כן במשפט היסודי של החשבון האינטגרלי על מנת לחשב את ערכו של האינטגרל:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_1^\infty \frac{f(x)}{\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t} \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{f(x)}{F(x)} \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} [\log(F(x)) - \log(F(1))] \\ &= \textstyle\log(\lim_{b\to\infty} \int_0^x f(x)) - \log(F(1)) = \infty \end{aligned}$$

כאשר אנו יודעים כי $\log(F(1))$ הינו מספר סופי מכיוון שהראינו $F(1) \neq 0$, וכן ודאי ש־$F(1) \neq \infty$ שכן $f(x)$ רציפה ואינטגרבילית בקטע $[0, 1]$.
ב) מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^\infty \binom{6n}{3n} x^n$.
__פתרון:__ בדיוק באותו אופן בו פותרים את סעיף א בשאלה 4 של מועד א 2007.

שאלה 4

א) הוכח כי אם $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ מהצורה $g(x) = \sum_{k=1}^n a_k 1_{I_k}(x)$ כאשר $n \geq 1$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ו־$I_1, .., I_n \subset [0,1]$, כך ש

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

__פתרון:__ f פונקציה רציפה בקטע סגור, לכן על פי משפט קנטור רציפה בו במ"ש. לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

לכן בהינתן $\varepsilon > 0$, קיים $n \geq 1$ כך ש- $\frac{1}{n} < \delta$. נבנה את החלוקה הבאה של הקטע $[0,1]$:

$$\forall 0 \leq k < n : I_k = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$$

כאשר את הקטע האחרון בחלוקה נגדיר כקטע סגור.
כמו כן נגדיר $a_k = f(\frac{k+1}{n})$ ו- $g(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k 1_{I_k}(x)$. מידית ניתן לראות שעבור $x = 1$, מתקיים $g(1) = f(1)$.
עתה עבור $1 \neq x \in [0,1]$, קיים k כך ש- $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$ ולכן $g(x) = f(\frac{k+1}{n})$, מכיוון ש- $|x - \frac{k+1}{n}| < \frac{1}{n} < \delta$ נקבל כי

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(\frac{k+1}{n})| < \varepsilon$$

לכן גם מתקיים

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

כנדרש.
ב) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו-$I = [a,b]$ קטע סופי. הוכיחו כי

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| \, \mathrm{d}x \underset{h \to 0}{\to} 0$$

<u>פתרון:</u> נשים לב כי לכל h מתקיים כי $f(x+h) - f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ולכן בפרט אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.
f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a-1, b+1]$ ולכן רציפה בו במ"ש, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

נבחר $\delta > 0$ המתאים ל-$\frac{\varepsilon}{(b-a)}$, לכן מתקיים:

$$\forall |h| < \delta : \int_a^b |f(x+h) - f(x)| \, \mathrm{d}x \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x+h) - f(x)| < (b-a) \frac{\varepsilon}{(b-a)} = \varepsilon$$

מכיוון ש-ε קטן כרצוננו נסיק מכך כי

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| \, \mathrm{d}x \underset{h \to 0}{\to} 0$$

שאלה 5

א) חשבו את הגבול

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3k^2}}$$

<u>פתרון:</u> נכתוב את הסכום באופן מעט שונה

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3k^2}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{4 - 3(\frac{k}{n})^2}}$$

עתה ניתן לשים לב כי הסכום הנ"ל הוא סכום רימן המתאים לפונקציה $\frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}$, ולחלוקה $T = \{0 < \frac{1}{n} < ... < \frac{n-1}{n} < 1\}$ של הקטע $[0,1]$. כלומר מתקיים

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3k^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4 - 3x^2}}$$

נפתור את האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x = \sin t & t : 0 \to \frac{\pi}{3} \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \, \mathrm{d}t & \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{27}}$$

(האמת שהחלפת המשתנים מיותרת וניתן היה לזהות כי מדובר בנגזרת של $\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$)
לכן קיבלנו כי

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-3k^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{27}}$$

ב) תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על ידי

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

האם f דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$?
__פתרון:__ אם f אכן דיפרנציאבילית בנקודה, אזי בהכרח מתקיים כי $\nabla f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))$.
נחשב את הנגזרות החלקיות על פי ההגדרה

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\frac{h\cdot0}{h^2}=0$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\frac{h\cdot0}{h^2}=0$$

ניזכר כי f דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ אם מתקיים

$$f(x,y)=f(0,0)+<\nabla f(0,0),(x,y)>+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

במקרה שלנו על מנת ש־f תהיה דיפרנציאבילית צריך להתקיים

$$f(x,y)\overset{?}{=}o(|r|)$$

נבדוק האם אכן מתקיים התנאי

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{[x^2+y^4]\sqrt{x^2+y^2}}$$

נבדוק בקואורדינטות פולאריות, ונניח כי אנו שואפים במסלול בו $\cos\theta\neq0$:

$$\lim_{r\to0^+}\frac{r^3\sin^2\theta\cos\theta}{r[r^2\cos^2\theta+r^4\sin^4\theta]}=\lim_{r\to0^+}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+r^3\sin^4\theta}=\tan^2\theta\cos\theta$$

ולמשל עבור $\theta=\frac{\pi}{4}$, נקבל $\tan^2\theta\cos\theta\neq0$.
כלומר קיבלנו כי $f(x,y)\neq o(\sqrt{x^2+y^2})$ ולכן f אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

שאלה 6

א) יהיו $a>b>0$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(b^nx)}{a^n}$ מתכנס במ"ש על $\mathbb{R}$ וכי הפוקנציה $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $w(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(b^nx)}{a^n}$ הינה גזירה ברציפות.
__פתרון:__ שאלה זו כמעט זהה לשאלה המקבילה במועד א', הפתרון באותה דרך למעט העובדה שהפעם ב־$x_0=0$ לא מתקבל טור אפסים אלא הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n}$.
אני נוטה להניח שיש פה טעות בשאלה מכיוון שעבור $a<1$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ הוא בהכרח טור מתבדר ואז לא תיתכן התכנסות במ"ש של $w(x)$ בכל $\mathbb{R}$.
אם נניח כי נתון $a>1$ אזי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ מתכנס ונוכל להמשיך באותו אופן כמו בשאלה 6 במועד א'.
ב) האם האינטגרל $\int_0^{\infty}e^{-x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ מתכנס?
__פתרון:__ כמו בשאלה המקבילה במועד א'.

2007 סמסטר א', מועד מיוחד (אהרונסון)

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
I) עבור פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

א) אם $U \subset \mathbb{R}$ פתוחה, אזי גם $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2$ פתוחה.
<u>**פתרון:**</u> הטענה נכונה.
תהי $x_0 \in f^{-1}(U)$ ונניח כי $f(x_0) = y_0 \in U$. U קבוצה פתוחה ולכן קיימת סביבה של y_0 כך ש־ $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset U$.
f פונקציה רציפה ולכן קיימת $\delta > 0$ כך ש־ $\forall x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset U$, כלומר:

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U \Rightarrow x \in f^{-1}(U)$$

ולכן $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$.
ב) אם $U \subset \mathbb{R}^2$ סגורה, אזי גם $f(U) \subset \mathbb{R}$ סגורה.
<u>**פתרון:**</u> הטענה אינה נכונה.
ניקח למשל את הפונקציה $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2}$, זוהי פונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות ומכיוון ש־ $1 + x^2 \neq 0$עבור כל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
נגדיר $U = \mathbb{R}^2$, זוהי קבוצה סגורה כמובן. אבל $f(U) = (0,1]$, וזוהי אינה קבוצה סגורה.
ג) אם $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ וקיים $\varepsilon > 0$ כך ש־ $f(x) \geq f(x_0)$ לכל $x \in B(x_0, \varepsilon)$, אזי $\nabla f(x_0) = (0,0)$.
<u>**פתרון:**</u> הטענה נכונה.
מכיוון ש־f דיפרנציאבילית ברציפות מתקיים עבור כל $\hat{u} \in \mathbb{R}^2$ וקטור יחידה ו־$t \in \mathbb{R}$:

$$f(x_0 + t\hat{u}) - f(x_0) = t < \nabla f(x_0), \hat{u} > +o(t) \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\hat{u}) - f(x_0)}{t} =< \nabla f(x_0), \hat{u} >$$

מכיוון ש־x_0 נקודת מינימום מקומית אזי עבור $|t| < \varepsilon$ מתקיים $f(x_0 + t\hat{u}) - f(x_0) > 0$.
לכן עבור $t \to 0^+$ נקבל $< \nabla f(x_0), \hat{u} > \geq 0$ ועבור $t \to 0^-$ נקבל $< \nabla f(x_0), \hat{u} > \leq 0$.
מכאן שבהכרח מתקיים $< \nabla f(x_0), \hat{u} > = 0$ עבור כל $\hat{u}$, ולכן זה גורר (על פי טענה מאלגברה ליניארית) כי $\nabla f(x_0) = (0,0)$.
II) אם $A \subset (0,1)$ ו־ $int(A) = \emptyset$ אזי 1_A אינטגרבילית על $[0,1]$ ו־$\int_0^1 1_A(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
<u>**פתרון:**</u> הטענה אינה נכונה. ניקח את $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap (0,1)$ ואז נקבל כי $1_A(x) = D(x)$ פונקציית דיריכלה. ראינו בשיעור כי פונקציה זו אינה אינטגרבילית בקטע $(0,1)$.
III) אם $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ו־$|f(x) - f(y)| \leq ||x - y||^2$, לכל $x, y \in \mathbb{R}^2$, אזי f קבועה.
<u>**פתרון:**</u> הטענה נכונה.
נראה כי f דיפרנציאבילית ב־$\mathbb{R}^2$ וכי $\nabla f \equiv 0$.
תהי $x_0 \in \mathbb{R}^2$, אזי f דיפרנציאבילית ב־x_0 אם ורק אם קיים וקטור $\nabla f(x_0)$ כך שמתקיים

$$f(x_0 + t\hat{u}) = f(x_0) + < \nabla f(x_0), t\hat{u} > +o(t)$$

כאשר $t \in \mathbb{R}$ ו־$\hat{u}$ וקטור יחידה. נראה כי הנ"ל מתקיים עבור $\nabla f(x_0) = 0$:

$$f(x_0 + t\hat{u}) \stackrel{?}{=} f(x_0) + o(t) \quad \Leftrightarrow f(x_0 + t\hat{u}) - f(x_0) \stackrel{?}{=} o(t)$$

ואכן מתקיים כי

$$\lim_{t \to 0} \left|\frac{f(x_0 + t\hat{u}) - f(x_0)}{t}\right| \leq \lim_{t \to 0} \frac{||x_0 + t\hat{u} - x_0||^2}{|t|} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{|t|} = 0$$

כלומר הראינו כי בכל נקודה $x_0 \in \mathbb{R}^2$ מתקיים כי f דיפרנציאבילית ו־$\nabla f(x_0) = 0$.
לכן מכיוון ש־ $\nabla f \equiv 0$ נסיק כי f קבועה על פי הנלמד בכיתה (ואם זה לא נלמד בכיתה אפשר להראות את זה על פי משפט לגרנז').

שאלה 3

נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ע"י

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\frac{3}{2}} y^2}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

האם f: רציפה ב־$(0,0)$? דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$?
<u>**פתרון:**</u> נבדוק רציפות ב־$(0,0)$ בקואורדינטות פולריות

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|x|^{\frac{3}{2}} y^2}{x^4 + y^2} = \lim_{r \to 0^+} \frac{r^{\frac{7}{2}} |\cos\theta|^{\frac{3}{2}} \sin^2\theta}{r^4 \cos^4\theta + r^2 \sin^2\theta} = \lim_{r \to 0^+} \frac{r^{\frac{3}{2}}}{r^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta} |\cos\theta|^{\frac{3}{2}} \sin^2\theta$$

עבור $\sin\theta \neq 0$ ניתן לראות כי הגבול הנ"ל הינו 0 ($\frac{r^{\frac{3}{2}}}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta} \to 0$ ו־$|\cos\theta|^{\frac{3}{2}}\sin^2\theta$ חסום), כאשר $\sin\theta = 0$ אזי מלכתחילה עבור כל $r > 0$ מתקיים $\frac{|x|^{\frac{3}{2}}y^2}{x^4+y^2} = 0$ ולכן הגבול הינו 0.
לכן $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ ו־f אכן רציפה בנקודה $(0,0)$.
נבדוק דיפרנציאביליות, אם f דיפרנציאבילית אז מתקיים בהכרח כי $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0))$, במקרה שלנו קל לבדוק (במבחן כדאי להראות) כי

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

לכן f דיפרנציאבלית בנקודה $(0,0)$ אם ורק אם מתקיים

$$f(x,y) \stackrel{?}{=} f(0,0) + < \nabla f(0,0), (x,y) > + o(\sqrt{x^2+y^2}) = o(\sqrt{x^2+y^2})$$

מתקיים כי

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\frac{3}{2}}y^2}{[x^4+y^2]\sqrt{x^2+y^2}}$$

נבדוק בקואורדינטות פולאריות

$$\lim_{r\to0^+} \frac{r^{\frac{7}{2}}|\cos\theta|^{\frac{3}{2}}\sin^2\theta}{r^5\cos^4\theta + r^3\sin^2\theta} = \lim_{r\to0^+} \frac{\sqrt{r}}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}|\cos\theta|^{\frac{3}{2}}\sin^2\theta = 0$$

כאשר השוויון האחרון מתקיים מאותם שיקולים כמו במקרה הקודם.
לכן $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ ו־f דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$.

שאלה 5

נתונה סדרה של פונקציות $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ כך ש־ $f_n \rightrightarrows \sin$ במ"ש על $[0,2\pi]$. הוכיחו כי הסדרות $\sup_{x\in[0,2\pi]} f_n(x)$ ו־$\inf_{x\in[0,2\pi]} f_n(x)$ מתכנסות ומצאו את גבולותיהן.
פתרון: הפתרון הינו באותו אופן בו פתרנו את שאלה 2 במבחן של סודין:2008 סמסטר ב', מועד ב' (אולי במקרה הספציפי הזה יש דרך קצת יותר פשוטה/מהירה, אבל גם הפתרון הנ"ל בודאות נכון).

שאלה 6

הוכיחו כי האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$$

מתכנס וחשבו אותו.
פתרון: נחשב ראשית את האינטגרל $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$:

$$\begin{array}{c} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \int_a^b \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^{2x}+1} \\ \left[\begin{array}{cc} t = e^x & t : e^a \to e^b \\ \mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x & \end{array}\right] \\ = \int_{e^a}^{e^b} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(e^b) - \arctan(e^a) \end{array}$$

לכן מתקיים כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \lim_{a\to\infty}\lim_{b\to-\infty}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \lim_{a\to\infty}\lim_{b\to-\infty}[\arctan(e^b)-\arctan(e^a)] = \pi$$

2009 סמסטר ב', מועד א' (קלרטג,גלוסקין)

שאלה 1

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה 1 ־ מחזורית הגזירה אינסוף פעמים. הוכיחו כי לכל $p>0$ שלם מקדמי פוריה של f מקיימים

$$\lim_{n\to\pm\infty} n^p \hat{f}(n)=0$$

<u>פתרון:</u> בכיתה הראינו כי עבור f גזירה ברציפות מתקיים

$$\hat{f}'(n)=i2\pi n\hat{f}(n)$$

עבור f גזירה אינסוף פעמים ניתן, באמצעות הפעלה חוזרת של הטענה הנ"ל, להסיק כי לכל $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים:

$$\hat{f^{(p)}}(n)=(i2\pi)^p n^p\hat{f}(n)$$

מכיוון ש־ $f^{(p)}$ רציפה, היא בפרט אינטגרבילית ולכן על פי הלמה־של רימן לבג מתקיים:

$$\lim_{n\to\pm\infty}\hat{f^{(p)}}(n)=0\Rightarrow\lim_{n\to\pm\infty}(i2\pi)^p n^p\hat{f}(n)=0\Rightarrow\lim_{n\to\pm\infty}n^p\hat{f}(n)=0$$

עתה עבור $p>0$ שאינו שלם קיים k שלם אי שלילי כך ש־ $k<p<k+1$ ולכן מתקיים:

$$|n^k\hat{f}(n)|\le|n^p\hat{f}(n)|\le|n^{k+1}\hat{f}(n)|$$

באמצעות משפט הסנדביץ' נקבל כי גם במקרה זה מתקיים $\lim_{n\to\pm\infty}n^p\hat{f}(n)=0$.

שאלה 2

חשבו את

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

בעזרת טורי חזקות או בכל דרך אחרת.

<u>פתרון:</u> לשם פתרון השאלה נשתמש במשפטים שלמדנו אודות אינטגרביליות וגזירות של טורי חזקות על פיהם אם $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R, אזי ברדיוס ההתכנסות מתקיים:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

והטורים הנ"ל הינם בעלי רדיוס התכנסות R.

נסמן אם כן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$, נשים לב כי אנו מתבקשים למצוא את $f(\frac{1}{3})$.

כמו כן נשים לב כי רדיוס ההתכנסות של הטור הנ"ל, על פי משפט קושי הדמרד הינו $R=\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=1$.

מתקיים כי:

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=x\cdot g(x)$$

נמצא את $g(x)$, נבצע אינטגרציה תוך שימוש במשפט שצוטט לעיל:

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\cdot h(x)$$

אנו יודעים כי מתקיים $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, ולכן

$$\frac{1}{(1-x)^2}=(\frac{1}{1-x})'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=h(x)$$

לכן מהשוויונות המופיעים לעיל נוכל לכתוב

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow$$
$$g(x) = (\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t)' = (\frac{x}{(1-x)^2})' = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} = \frac{x}{(1-x)^3} \Rightarrow$$
$$f(x) = x \cdot g(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}$$

כל השוויונות הנ"ל נכונים ברדיוס ההתכנסות, ומכיוון שרדיוס ההתכנסות של כל הטורים הנ"ל הינו $R=1$, נוכל לכתוב

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = f(\frac{1}{3}) = \frac{(\frac{1}{3})^2}{(\frac{2}{3})^3} = \frac{3}{2}$$

שאלה 3

א) האם האינטגרל $\int_0^\infty \sin(x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}x$ מתכנס?

<u>**פתרון:**</u> הנקודה הבעייתית היחידה הינה ב־∞ ($\sin(x^{\frac{3}{2}})$ רציפה וחסומה על $[0,\infty)$), לכן מספיק לבדוק התכנסות של האינטגרל $\int_1^\infty \sin(x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}x$.

נבצע החלפת משתנים:

$$\int_1^\infty \sin(x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = x^{\frac{3}{2}} & x = t^{\frac{2}{3}} \\ \mathrm{d}t = \frac{3}{2}\sqrt{x}\mathrm{d}x & \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}} \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}t$$

עתה נוכל להשתמש במבחן דיריכלה אשר נוסחו: יהיו f,g פונקציות גזירות ברציפות, אינטגרביליות על כל תת קטע סופי של $[1,\infty)$ ונניח כי

- האינטגרל $\int_1^a f \le M$ עבור כל $a \in (1,\infty)$.
- הפונקציה $g(x)$ הינה פונקציה חיובית יורדת ומקיימת $g(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$

אזי האינטגרל $\int_1^\infty fg$ מתכנס.

ואכן עבור $f(t) = \sin(t)$ מתקיים כי עבור כל a סופי $\int_1^a \sin(t) \le 2$(אולי כדאי להסביר למה, פונקציה מחזורית אם אינטגרל שמתאפס על פני מחזור שלם וכו'..)

כמו כן מתקיים כי $g(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ מונטונית יורדת ושואפת לאפס.

שתי הפונקציות הנ"ל גזירות ברציפות ואינטגרביליות על כל תת קטע סופי של $[1,\infty)$ ולכן על פי מבחן דיריכלה האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}t$ מתכנס, ועל כן גם האינטגרל המקורי אודותיו נשאלנו מתכנס.

ב) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות. נניח ש־ $\int_0^\infty f$ מתכנס וש־ $f'(x)$ חסומה.

הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

<u>**פתרון:**</u> נניח בשלילה כי $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$, כלומר קיימת סדרה של נקודות $x_n \to \infty$, כך שמתקיים $|f(x_n)| > \varepsilon$.

כמו כן מתקיים כי אם $x \in (x_n - \frac{\varepsilon}{2M}, x_n + \frac{\varepsilon}{2M})$, כאשר M הינו החסם של הנגזרת, אזי על פי משפט לגרנז'

$$|f(x_n) - f(x)| = f'(c)|x - x_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2}$$

כלומר לכל $x \in (x_n - \frac{\varepsilon}{2M}, x_n + \frac{\varepsilon}{2M})$ מתקיים

$$|f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

מכיוון שהאינטגרל $\int_0^\infty f$מתכנס אזי על פי קריטריון קושי קיים B כך שלכל $b_1, b_2 > B$ מתקיים

$$|\int_{b_1}^{b_2} f| < \frac{\varepsilon^2}{2M}$$

אבל לכל $B > 0$ קיים $x_n > B + \frac{\varepsilon}{2M}$ כך שמתקיים

$$|\int_{x_n - \frac{\varepsilon}{2M}}^{x_n + \frac{\varepsilon}{2M}} f(x)| = |f(c)| \int_{x_n - \frac{\varepsilon}{2M}}^{x_n + \frac{\varepsilon}{2M}} \mathrm{d}x > \frac{\varepsilon^2}{2M}$$

כאשר השוויון הראשון מתקיים על פי משפט ערך הביניים האינטגרלי, מכיוון ש־f רציפה ושומרת סימן בקטע $(x_n - \frac{\varepsilon}{2M}, x_n + \frac{\varepsilon}{2M})$.

כלומר, קיבלנו שקריטריון קושי אינו מתקיים, בסתירה להתכנסות האינטגרל $\int_0^\infty f$.

על כן בהכרח מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

שאלה 4

יהיו $0 < a < b < 1$. עבור $k \geq 0$ שלם נסמן:

$$R_k = \int_a^b t^k \log t \, \mathrm{d}t$$

א) הראו כי

$$R_k = \frac{1}{k+1}[b^{k+1}\log b - a^{k+1}\log a] - \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)^2}$$

__פתרון:__ נשים לב כי t^k ו־$\log t$ פונקציות רציפות וגזירות ולכן ניתן לבצע אינטגרציה בחלקים:

$$R_k = \tfrac{1}{k+1}[t^{k+1}\log t]_a^b - \tfrac{1}{k+1}\int_a^b \tfrac{t^{k+1}}{t} = \tfrac{1}{k+1}[t^{k+1}\log t]_a^b - \tfrac{1}{k+1}[\tfrac{t^{k+1}}{k+1}]_a^b =$$
$$= \tfrac{1}{k+1}[b^{k+1}\log b - a^{k+1}\log a] - \tfrac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)^2}$$

ב) הראו כי

$$\int_a^b \frac{\log t}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} R_k$$

__פתרון:__ נשים לב כי מתקיים

$$\tfrac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^K$$
$$\int_a^b \tfrac{\log t}{1-t}\mathrm{d}t = \int_a^b (\sum_{k=0}^{\infty} t^k \log t) \, \mathrm{d}t$$

עתה נשים לב כי לכל $t \in [a,b]$ מתקיים

$$|t^k \log t| \leq |\log a| b^k$$

מכיוון ש־$0 < b < 1$ הטור $|\log a| \sum_{k=0}^{\infty} b^k$ הוא טור מספרים מתכנס, ולכן על פי M־ בוחן של וירשטראס הטור $\sum_{k=0}^{\infty} t^k \log t$ מתכנס במידה שווה (לפונקציה $\frac{\log t}{1-t}$).

על כן נוכל להשתמש במשפט אודות אינטגרציה איבר איבר של טורי פונקציות:

אם הטור $\sum a_n(x)$ הינו טור של פונקציות אינטגרביליות רימן בקטע $[a,b]$ וכן $\sum a_n(x) \rightrightarrows f(x)$ במידה שווה, אזי מתקיים

$$\int_a^b f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x)$$

באמצעות שימוש במשפט זה נוכל לכתוב

$$\int_a^b \frac{\log t}{1-t}\mathrm{d}t = \int_a^b (\sum_{k=0}^{\infty} t^k \log t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b t^k \log t \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} R_k$$

וקיבלנו את הדרוש.

ג) חשבו את את הגבול

$$\lim_{\substack{a \to 0^+ \\ b \to 1^-}} \int_a^b \frac{\log t}{1-t}\mathrm{d}t$$

__פתרון:__ הרעיון הוא להשתמש בשוויון $\int_a^b \frac{\log t}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{k+1}[b^{k+1}\log b - a^{k+1}\log a] - \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)^2})$, לפרק את הטור לטורים ניתנים לחישוב שמתכנסים במ"ש ולחשב אותם.

שאלה 5

תהי $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות. נתון כי בכל נקודה (x,y) במעגל היחידה $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ מתקיים:

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}\geq 0$$

נסמן $f(t)=u(\cos t,\sin t)$.

א) הוכיחו כי $f'(t)\leq 0$ לכל $t\in[0,2\pi]$.

<u>**פתרון:**</u> u גזירה ברציפות, וכן $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ הינה מסילה גזירה ברציפות לכל $t\in[0,2\pi]$. לכן נוכל להשתמש בכלל השרשת על פיו מתקיים:

$$(u(\gamma(t))'=<\nabla u,\gamma'(t)>$$

נקבל כי

$$f'(t)=<(\frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t)),\frac{\partial u}{\partial y}(\gamma(t)),(-\sin t,\cos t)>=\cos t\frac{\partial u}{\partial x}(\cos t,\sin t)-\sin t\frac{\partial u}{\partial y}(\cos t,\sin t)$$

נשים לב כי מתקיים $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ ולכן נוכל להשתמש בנתון ולקבוע כי

$$\cos t\frac{\partial u}{\partial x}(\cos t,\sin t)-\sin t\frac{\partial u}{\partial y}(\cos t,\sin t)\leq 0$$

כלומר קיבלנו כי $f'(t)\leq 0$.

ב) הוכיחו כי $f(t)$ פונקציה קבועה.

<u>**פתרון:**</u> נשים לב כי $f(t)$ הינה פונקציה מחזורית 2π שכן מתקיים

$$f(0)=(1,0)=f(2\pi)$$

כמו כן בסעיף הקודם ראינו כי $f'(t)\leq 0$ ולכן f יורדת בקטע $[0,2\pi]$, כלומר מתקיים

$$\forall t\in[0,2\pi]: f(0)\geq f(t)\geq f(2\pi)$$

אבל מכיוון ש־f מחזורית מתקיים

$$\forall t\in[0,2\pi]: f(0)=f(t)=f(2\pi)$$

ולכן f קבועה.

2009 סמסטר ב', מועד ב' (קלרטג,גלוסקין)

שאלה 1

תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח ש־ $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס. חשבו את

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x$$

<u>**פתרון:**</u> נבצע החלפת משתנים:

$$\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} t=nx & t:0\to n\\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{n} & \end{bmatrix}=\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

כאשר הפונקציה $\varphi(x)=\frac{1}{n}x$ הינה פונקציה מונוטונית עולה ולכן השוויון לעיל אכן נכון.
עתה מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t=0\cdot\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

כאשר מעבר הגבול נכון מכיוון שאנו יודעים כי $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ קיים וסופי.
כלומר קיבלנו

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=0$$

שאלה 2

א) האם האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

מתכנס בתנאי? בהחלט?

<u>פתרון:</u> נשים לב כי הנקודה הבעייתית היחידה הינה ∞ (בכל תת קטע סופי הפונקציה רציפה וחסומה).
האינטגרל $\int_0^a \cos x \le 2$ עבור כל $a \in [0,\infty)$ וכן $\frac{1}{1+x}$ פונקציה מונוטונית יורדת ושואפת לאפס ב־∞. כמו כן $\cos x, \frac{1}{1+x}$ פונקציות גזירות ברציפות בקרן $[0,\infty)$ ולכן ניתן להשתמש במבחן דיריכלה ולקבוע כי האינטגרל הנ"ל אכן מתכנס בתנאי.
נראה כי האינטגרל אינו מתכנס בהחלט, ראשית נשים לב שמתקיים

$$\frac{|\cos x|}{|1+x|} \ge \frac{\cos^2 x}{1+x}$$

ולכן על פי מבחן ההשוואה עבור פונקציות חיוביות, אם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x} = \infty$ אזי גם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}$ מתבדר.
מכיוון שמתקיים $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ אזי

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+\cos 2x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{\cos 2x}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

כאשר במידה ושני האינטגרלים באגף שמאל קיימים, ולפחות אחד מהם סופי אזי השוויון הנ"ל נכון בודאי.
באמצעות מבחן דיריכלה, מאותם שיקולים שפורטו לעיל, ניתן לראות כי האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ קיים וסופי.
אבל האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \log(1+x)|_0^\infty = \infty$$

לכן גם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ מתבדר.

ב) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה וחיובית. נניח ש־ $\lim_{x\to\infty}(\log f)'(x)$ קיים ושלילי. הוכיחו כי $\int_0^\infty f$ מתכנס.

<u>פתרון:</u> מהנתון $\lim_{x\to\infty}(\log f)'(x) = c < 0$ נסיק כי קיים x_0 כך שלכל $x > x_0$ מתקיים $(\log f)'(x) < c+\varepsilon < 0$ ולכן מתקיים כי

$$\int_{x_0}^x (\log f)'(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{x_0}^x (c+\varepsilon)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \log f(x) - \log f(x_0) = (c+\varepsilon)(x-x_0) = c'(x-x_0)$$

כאשר c' קבוע שלילי. לכן נבצע אקספוננציאציה של השוויון שקיבלנו

$$\frac{1}{f(x_0)}f(x) \le e^{-c'x_0}e^{-|c'|x}$$
$$f(x) \le Me^{-|c'|x}$$

כאשר M קבוע חיובי כלשהוא.
עתה מכיוון שהאינטגרל $\int_0^\infty e^{-|c'|x}\,\mathrm{d}x$ מתכנס, ממבחן ההשוואה לפונקציות חיובית נובע כי גם $\int_0^\infty f$ מתכנס.

שאלה 3

חשבו את

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2+1}{n\cdot 2^{n+1}}$$

בעזרת טורי חזקות או בכל דרך אחרת

<u>פתרון:</u> נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2+1}{n}x^n$ ואז מתקיים $\sum_{n=0}^\infty \frac{n^2+1}{n\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$
נשים לב כי על פי קושי־הדמרד מתקיים $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n}}$ ומכיוון שמתקיים $\lim \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n}} = 1$ נקבל כי $R=1$ ולכן הטור אכן מתכנס ב־$x=\frac{1}{2}$.
כמו כן נשים לב כי מתקיים

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty (nx^n + \frac{x^n}{n}) = \sum_{n=1}^\infty nx^n + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = x\sum_{n=1}^\infty nx^{n-1} + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = x\cdot g(x) + h(x)$$

(השוויון הנ"ל נכון מכיוון ששני הטורים בעל רדיוס התכנסות $R=1$ וטורי חזקות מתכנסים בהחלט ברדיוס ההתכנסות, לכן ניתן לשנות את סדר הסכימה).
באופן דומה לדרך בה הראינו בשאלה 3, 2009 מועד א', נקבל כי:

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$h(x)=-\log(1-x)$$

לכן נקבל כי

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}-\log(1-x)$$
$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2}-\log(\tfrac{1}{2})=2+\log 2$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=1+\frac{1}{2}\log 2$$

שאלה 5

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |f(x,y)|\le\sqrt{x^2+y^2}$$

נסמן $g=f^2$. הגדירו דיפרנציאביליות של פונקציה מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}$, הוכיחו כי g דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$ וחשבו את הנגזרות החלקיות.
__פתרון:__ נאמר ש-$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם קיים $\nabla g(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ כך שעבור כל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+<\nabla g(x_0,y_0),(x-x_0,y-y_0)>+o_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

נראה כי עבור g הנתונה מתקיים כי g דיפרנציאבילית בראשית, ומתקיים $\nabla g(0,0)=(0,0)$, זה נכון אם מתקיים:

$$g(x,y)=g(0,0)+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

נשים לב שמהנתון על f נובע כי

$$|f(0,0)|\le\sqrt{0}=0\Rightarrow f(0,0)=0\Rightarrow g(0,0)=0$$

לכן עלינו לבדוק האם מתקיים $g(x,y)\stackrel{?}{=}o(\sqrt{x^2+y^2})$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

לכן $g(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ והראינו כי g אכן דיפרנציאבילית בראשית ומתקיים $\nabla g(0,0)=(0,0)$.
על פי מה שראינו בכיתה אם g דיפרנציאבלית בנקודה אזי בהכרח מתקיים $\nabla g=(f_x,f_y)$, לכן במקרה שלנו מתקיים

$$f_x=f_y=0$$

2008 סמסטר ב', מועד מיוחד (סודין)

שאלה 1

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^1\cos(\log x)\,\mathrm{d}x$$

פתרון: ראשית נבצע חילוף משתנים

$$\int_0^1 \cos(\log x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t=-\log x & x=e^{-t} \\ t:\infty\to 0 & \mathrm{d}x = -e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= -\int_\infty^0 e^{-t}\cos(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

השתמשנו בפונקציה מונוטונית יורדת וגזירה $\varphi(t)=e^{-t}$, מכיוון שהפונקציות רציפות אין צורך שהפונקציה תהיה מונוטונית עולה, ולכן אכן מתקיים השוויון וחילוף המשתנים תקין.
נשים לב כי $\cos t$ ו-e^{-t} רציפות וגזירות ולכן ניתן לבצע אינטגרציה בחלקים:

$$I(b)=\int_0^b e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\cos t|_0^b - \int_0^b e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\cos t|_0^b + e^{-t}\sin t|_0^b - \int_0^b e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t =$$
$$= -e^{-t}\cos t|_0^b + e^{-t}\sin t|_0^b - I(b) \Rightarrow 2I(b) = -e^{-t}\cos t|_0^b + e^{-t}\sin t|_0^b$$
$$I(b)=\tfrac{1}{2}[e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t]_0^b$$

נוכל עתה להשאיף את $b\to\infty$ ולקבל כי

$$\int_0^1 \cos(\log x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}[e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t]_0^b = \frac{1}{2}$$

שאלה 2

האם האינטגרל

$$\int_0^\infty (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}\,\mathrm{d}x$$

מתכנס בהחלט? מתכנס בתנאי? מתבדר?
פתרון: קל לראות כי האינטגרל אינו מתכנס בהחלט מכיוון שמתקיים

$$\int_0^\infty |(-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}|\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{d}x = x|_0^\infty = \infty$$

נבדוק התכנסות בתנאי, נשים לב שלמעשה מתקיים כי

$$\int_0^\infty (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$$

קל לראות כי

$$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

נראה שהסדרה a_n הינה סדרה מונוטונית יורדת:

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ניתן לראות כי מתקיים $f'(x)<0$ עבור כל $x>0$ ולכן $f(x)$ פונקציה יורדת, כלומר

$$a_{n+1}=f(n+1)\le f(n)=a_n$$

על כן ניתן להשתמש במבחן לייבניץ להתכנסות טור עם סימנים מתחלפים ולהסיק כי הטור $\sum_{n=0}^\infty(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$ מתכנס.
על כן האינטגרל $\int_0^\infty (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}\,\mathrm{d}x$ מתכנס בתנאי.

שאלה 3

יהי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$ טור מתכנס עבור $s=t$ הוכיחו כי

1. הטור מתכנס במידה שווה עבור $t\le s<\infty$
2. הטור מתכנס בהחלט עבור $s>t+1$

<u>**פתרון:**</u> **1)** ראשית נשים לב שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n^t}\frac{1}{n^{s-t}}$$

הסדרה $f_n(s)=\frac{1}{n^{s-t}}$, עבור $s\ge t$, הינה סדרה מונוטונית יורדת ב־n וחסומה במידה אחידה ($f_n(s)\le 1$ לכל n).
הטור $g_n(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^t}$ הוא טור מספרים מתכנס, בפרט מתכנס במ"ש מכיוון שאינו תלוי ב־s.
לכן מתקיימים התנאים למבחן אבל להתכנסות במ"ש של הטור $\sum f_n(s)g_n(s)$, כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$ מתכנס במ"ש עבור $t\le s<\infty$.
2) נניח כי $s>t+1$, נסמן $s=t+1+\alpha$ ($\alpha>0$) נראה כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}|\frac{c_n}{n^s}|$ מתכנס.
מתקיים כי

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\frac{c_n}{n^{t+1+\alpha}}|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}|\frac{c_n}{n^t}|$$

ראינו בחדוו"א 1 כי טור מהצורה $g=\sum\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ הוא טור מתכנס עבור $\alpha>0$ (באמצעות מבחן העיבוי של קושי).
כמו כן הסדרה $f_n=|\frac{c_n}{n^t}|$ הינה האיבר הכללי של טור מתכנס, ולכן שואפת לאפס , לכן ממקום מסוים מתקיים $|\frac{c_n}{n^t}|<1$, ולכן $\frac{1}{n^{1+\alpha}}|\frac{c_n}{n^t}|\le\frac{1}{n^{1+\alpha}}$.
לכן באמצעות מבחן ההשוואה לטורים חיוביים נוכל להסיק כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}|\frac{c_n}{n^t}|$ מתכנס, כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{c_n}{n^s}|$ מתכנס עבור $s>t+1$.

שאלה 5

תהי $K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית ותהי $f:K\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי הגרף של f , $\Gamma_f:=\{(x,f(x)):x\in K\}$ הינו גם כן קבוצה קומפקטית.
<u>**פתרון:**</u> נוכיח כי לכל סדרת נקודות ב־Γ_f יש תת־סדרה מתכנסת, כאשר גבול הסדרה שייך ל־Γ_f.
תהי איפוא $y_n\in\Gamma_f$ סדרה, אזי y_n מהצורה $y_n=(x_n,f(x_n))$ כאשר x_n סדרת נקודות ב־K.
K קבוצה קומפקטית אזי ל־x_n יש תת סדרה מתכנסת x_{n_k} כאשר $L=\lim x_{n_k}\in K$.
מכיוון ש־f רציפה אזי אם $x_{n_k}\to L$ מתקיים גם כי $f(x_n)\to f(L)$.
כלומר קיימת תת סדרה מתכנסת של y_n, $y_{n_k}\to(L,f(L))$. מכיוון ש־L שייך ל־K אזי $(L,f(L))=\lim y_{n_k}\in\Gamma_f$.