07/07/11

# בוחן בלינארית 2 למדעי המחשב – מועד ב

1. יהי $V$ מ"ו,ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית שונה מאפס כך ש $T^3=0$.

a. יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל $V$. **הוכיחו/הפריכו:** המטריצה שעמודותיה הן הקואורדינאטות של $\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$ אינה הפיכה.

הוכחה: המטריצה הנ"ל לפי ההגדרה הינה $[T]_B^B$ (נניח והקואורדינאטות הן לפי הבסיס הנתון לצורך הפשטות. אם וקטורי הקואורדינאטות ת"ל לפי בסיס אחד, הן ת"ל לפי כל בסיס). ידוע ש $T^3=0$. לכן, $\left([T]_B^B\right)^3=\left[T^3\right]_B^B=0$. מטריצה המתאפסת כאשר כופלים אותה במטריצה שונה מאפס אינה הפיכה.

b. הוכיחו כי מתקיים $\dim(\operatorname{Im}T+\ker T)<n$

הוכחה: מכיוון שנתון שהעתקה שונה מאפס, קיים וקטור שונה מאפס בתמונה $Tv=w\neq 0$. אז יש שתי אופציות $T^2v=Tw=0$ ולכן $w\in KerT\wedge w\in \operatorname{Im}T$ או ש $T^3v=T^2w=0, Tw\neq 0$ ואז $Tw\in KerT\wedge Tw\in \operatorname{Im}T$. כך או כך קיבלנו $KerT\cap \operatorname{Im}T\neq 0$.

כעת, לפי **משפט הדרגה** ידוע לנו כי $\dim KerT+\dim \operatorname{Im}T=n$. לפי **משפט המימדים** ידוע לנו $\dim(\ker T+\operatorname{Im}T)=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T-\dim(\ker T\cap\operatorname{Im}T)=n-\dim(\ker T\cap\operatorname{Im}T)<n$ מכיוון שהוכחנו ש $\dim(\ker T\cap\operatorname{Im}T)>0$.

2.

a. תהי $A$ מטריצה ששורותיה תלויות לינארית. **הוכיחו/הפריכו:** כל מינור של המטריצה מקיים $|A_{ij}|=0$

הפרכה: $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}, |A_{11}|=2\neq 0$

b. תהי $A$ אנטי סימטרית ( $A^t=-A$ ) כך ש $|A-I|=2$ חשב את $|A^2+2A+I|$

פתרון: $|A^2+2A+I|=\left|\left(A^2+2A+I\right)^t\right|=|A^2-2A+I|=|(A-I)^2|=|A-I|^2=4$

3. יהיו $v_1=(1,0,2), v_2=(1,1,-1), v_3=(-1,-2,4)$ , ויהיו

$w_1=(1,0), w_2=(1,1), w_3=(-1,-2)$

a. כמה העתקות לינאריות $T$ קיימות כך ש $\forall i: Tv_i=w_i$ ? הוכח.

פתרון: ניתן לראות כי מתקיים $v_3=v_1-2v_2, w_3=w_1-2w_2$ וגם הוקטורים $v_1,v_2$ בת"ל. נשלים אותם לבסיס $\{v_1,v_2,v_4\}$. לכן לפי משפט ההגדרה, לכל $w_4$ שנבחר קיימת העתקה לינארית כך ש

$$Tv_1=w_1$$
$$Tv_2=w_2 .$$
$$Tv_4=w_4$$

כמו כן, $Tv_3=T(v_1-2v_2)=Tv_1-2Tv_2=w_1-2w_2=w_3$. לכן כל העתקה כזו מקיימת את תנאי השאלה. מכיוון שלכל וקטור $w_4$ נקבל העתקה **שונה** ומכיוון שיש אינסוף וקטורים, הוכחנו כי יש אינסוף העתקות המקיימת את תנאי השאלה.

b. אם יש העתקות לינאריות כאלה, מצאו אחת מהן במפורש. אם אין, החליפו את $v_3$ ומצאו העתקה לינארית מפורשת.

פתרון: קל לוודא כי $T(x,y,z)=(x,y)$ הינה העתקה לינארית המקיימת את תנאיי השאלה.