אלגברה ליניארית 2 – תרגיל מס' 10

3.1 תרגיל. הוכח שלכל וקטור $v\neq 0$, הוקטור $\tilde{v}=\frac{1}{\|v\|}\cdot v$ הוא נורמלי.

4.1 תרגיל. בדוק אילו מזוגות הוקטורים הבאים מאונכים זה לזה:

א. $(100,0,-999,0)$, $(0,1,0,2)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$.

ב. $(1,i)$, $(1,i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

ג. $(1,-i)$, $(1,i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

4.7 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n, ותהא $B\subseteq V$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. B בסיס אורתונורמלי.

ב.B קב' אורתונורמלית מגודל n

4.9 תרגיל. הגדר (ישירות) על $V=\mathbb{R}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך ש $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ יהווה בסיס אורתונורמלי לגבי מכפלה זאת.

4.16 תרגיל. א. הוכח שלכל מרחב וקטורי ממימד סופי יש בסיס אורתונורמלי.

ב. הוכח שניתן להשלים כל קבוצה אורתונורמלית לבסיס אורתונורמלי של המרחב.

5.4 תרגיל. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות, כאשר U,W תת-מרחבים של מרחב מכפלה פנימית V:

א. $(U+W)^\perp=U^\perp+W^\perp$.

ב. $(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$.

ג. $(U+W)^\perp=(U\cap W)^\perp$.

5.7 תרגיל. תהא $S=\{v_1,\dots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב V. הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים:

$$.v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i\in S^{\perp}$$

5.8 תרגיל. תהא $S=\{(1,-1,1,-1)\}\subseteq\mathbb{R}^4$ (עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית). מצא בסיס אורתונורמלי ל $S^{\perp}$.

5.15 תרגיל. הוכח או הפרך את הטענה הבאה (זה רעיון של דני): יהא V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $U,W\subseteq V$, כך ש $U\oplus W=V$. אזי $U^{\perp}=W$.

פתרו את התרגילים הבאים:

1. נתון: $S=\left\{\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$

א. בדוק ש S קבוצה ניצבת ושהיא בסיס ל-R^3.

ב. בטאו את הווקטור $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}8\\-4\\-3\end{bmatrix}$ כצירוף ליניארי של הוקטורים ב-S.

2. הטילו את הווקטור $\mathbf{b}$ על הישר דרך $\mathbf{a}$ לקבל ווקטור ההיטל $\mathbf{p}$. בדקו ש-$\mathbf{e}=\mathbf{p}-\mathbf{b}$ הוא ניצב ל-$\mathbf{a}$.

א. $\mathbf{a}=(1,2,2),\mathbf{b}=(1,1,1)$ ב. $\mathbf{a}=(1,2,1,2),\mathbf{b}=(1,-2,3,-4)$.

3. העביר את הקבוצה $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}\right\}$ לבסיס ניצב של $\mathbb{R}^3$ בשימוש השיטה שהצגנו בסוף השיעור (השיטה נקראת "גרם-שמידט").

4. העבר את הקבוצה $S=\left\{\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ לקבוצה ניצבת T ב$\mathbb{R}^3$ כך

ש$\operatorname{Span}S=\operatorname{Span}T$. כאן $\operatorname{Span}S=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$. מה הצורה של $\operatorname{Span}S$, הפורש של הווקטורים. בשימוש הנוסחאות מהכיתה מצא c_1,c_2 כך

ש $c_1\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\17\\17\end{bmatrix}$.

בהצלחה!