פתרון מבחן מועד א' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 28/02/17

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln\left(1+2x\right)\right)^4}{\left(1-\cos(x)\right)^2\ln(x)}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln\left(1+2x\right)\right)^4}{\left(1-\cos(x)\right)^2\ln(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln\left(1+2x\right)\right)^4}{(2x)^4}\left(\frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)^2\frac{2^4}{\ln(x)}=1^4\cdot2^2\cdot\frac{2^4}{-\infty}=0$$

ב. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)^x$$

ראשית נחשב את גבול בסיס החזקה:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x+2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{2}{2}=1$$

לכן הגבול המקורי הוא מהצורה 1^∞ ומותר להשתמש בכלל של $f^g\to e^{\lim(f-1)g}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)^x=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right)x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right)x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2-\left(x+1\right)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x+1}x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

ולכן סה"כ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)^x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

לפי כלל המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

2.

א. חשבו את $\int(\tan(x))^2\,dx$.

$$\int(\tan(x))^2\,dx=\int\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}dx=\int\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-1\right)dx=\tan(x)-x+C$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty\frac{\ln(x)}{x^3}dx$.

מדובר בפונקציה חיובית, לכן מותר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln(x)}{x^3}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\underset{Lopi}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

לכן האינטגרל בשאלה "קטן" (מבחינה גבולית) מהאינטגרל <u>המתכנס</u> $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ ולכן גם הוא מתכנס.

3. נביט בפונקציה $f(x)=e^x-x+a$.

א. מצאו את הערך המינימלי של f בכל $\mathbb{R}$.

ראשית נביט בנגזרת $f'(x)=e^x-1$. קל לראות (על ידי טבלה או ישירות) שעבור $x>0$ מתקיים כי $f'(x)>0$ ולכן הפונקציה עולה ממש, ועבור $x<0$ מתקיים $f'(x)<0$ והפונקציה יורדת ממש.

לכן לכל $x>0$ מתקיים כי $f(x)>f(0)$ ולכל $x<0$ מתקיים כי $f(x)>f(0)$ וסה"כ הערך המינימלי של הפונקציה בכל הממשיים הינו $f(0)=1+a$.

ב. קבעו לכל ערך של a כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$, והוכיחו תשובתכם.

כאשר $a>-1$ מתקיים כי $f(0)>0$. כיוון שהוכחנו שזה המינימום הגלובאלי, הפונקציה "מרחפת" מעל ציר x ואין פתרון למשוואה.

כאשר $a=-1$ אזי $f(0)=0$. מימין ומשמאל הפונקציה גדולה ממש כפי שהוכחנו בסעיף א', ולכן יש פתרון יחיד למשוואה.

עבור $a<-1$ מתקיים כי $f(0)<0$.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty} e^x - x + a = \lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{a}{e^x}\right) = \infty\cdot(1-0+0)=\infty$$

זה נכון כיוון ש $0=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} \underset{Lopi}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$.

לכן קיימת נקודה $x_1>0$ עבורה $f(x_1)>0$ ובקטע $(0,x_1)$ הפונקציה f מתאפסת לפי משפט ערך הביניים (היא רציפה כצירוף אלמנטריות בתחום הגדרתן).

כעת נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to(-\infty)} e^x - x + a = 0+\infty+a=\infty$$

לכן קיימת נקודה $x_2<0$ עבורה $f(x_2)>0$ ובקטע $(x_2,0)$ הפונקציה f מתאפסת לפי משפט ערך הביניים (היא רציפה כצירוף אלמנטריות בתחום הגדרתן).

כיוון שהפונקציה עולה ממש בקטע $[0,\infty)$ הפתרון שמצאנו שם הוא יחיד, וכיוון שהפונקציה יורדת ממש בקטע $(-\infty,0]$ הפתרון שמצאנו שם גם יחיד.

סה"כ ישנם בדיוק שני פתרונות למשוואה כאשר $a<-1$.

4. תהי f פונקציה גזירה בכל הממשיים כך ש $f(0)=0, f(1)=1$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x)\le 1$.

א. הוכיחו כי <u>לכל</u> $x\in[0,1]$ מתקיים כי $f(x)=x$.

נביט בפונקציה $h(x)=f(x)-x$.

ראשית, מתקיים כי $h(1)=h(0)=0$.

שנית מתקיים כי $h'(x)=f'(x)-1\le 0$ ולכן הפונקציה h אינה עולה.

כיוון שהיא אינה עולה, ושווה בקצות הקטע $[0,1]$ היא קבועה בקטע.

לכן לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $h(x)=0$ ולכן $f(x)=x$.

ב. מצאו f המקיימת את תנאי השאלה כך ש $f(-1)\ne -1$.

(רמז: פונקציה מפוצלת/תפר.)

נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ \sin(x) & x<0 \end{cases}$$

עבור $x>0$ מתקיים כי $f'(x)=1$, ועבור $x<0$ מתקיים כי $f'(x)=\cos(x)\le 1$.

עבור $x=0$ יש לחשב את הנגזרת לפי ההגדרה:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

לכן סה"כ $f'(0)=1$, ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x)\le 1$.

כמובן ש $f(0)=0, f(1)=1$.

לבסוף מתקיים כי $f(-1)=\sin(-1)\ne 1$.

(הערה: במקום $\sin(x)$ יכולנו לבחור את x^2+x או e^x-1 .)

5. תהי סדרה a_n המקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+1}=e^{a_n}$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

בשאלה 3 הוכחנו כי עבור $a=0$ הפונקציה e^x-x מרחפת מעל ציר האיקס, כלומר לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $e^x-x>0$.

לכן, בפרט, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1}-a_n=e^{a_n}-a_n>0$.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty}a_n$.

סדרה מונוטונית עולה מתכנסת במובן הרחב לגבול סופי אם היא חסומה או לאינסוף אם אינה חסומה.

נניח בשלילה שהיא מתכנסת לגבול סופי ונסמן $a_n\to L\in\mathbb{R}$, לכן כמובן גם $a_{n+1}\to L$.

כיוון שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1}=e^{a_n}$, נשאיף את שני הצדדים לאינסוף ונקבל כי $L=e^L$, בסתירה לכך שהוכחנו ש $e^L-L>0$.

לכן סה"כ $a_n\to\infty$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $\mathrm{a}_n=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+2\sin\left(\frac{2}{n}\right)+...+n\sin\left(\frac{n}{n}\right)}{n^2}$.

הסדרה הינה סכומי רימן של הפונקציה $f(x)=x\sin(x)$ בקטע $[0,1]$ עם החלוקה $P=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,1\right\}$

ובחירת הנקודות $\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,1\right\}$ שכן

$$\mathrm{a}_n=\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+2\sin\left(\frac{2}{n}\right)+...+n\sin\left(\frac{n}{n}\right)}{n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כיוון שהפונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ היא אינטגרבילית בו.

כיוון שפרמטר החלוקה $\lambda(P)=\frac{1}{n}\to 0$ סכומי הרימן מתכנסים לאינטגרל המסויים:

$$a_n\to\int_0^1 x\sin(x)dx=\left\{\begin{matrix} f'=\sin(x) & f=-\cos(x) \\ g=x & g'=1\end{matrix}\right\}=\left[-x\cos(x)\right]_0^1-\int_0^1\left(-\cos(x)\right)dx=$$

$$\left[-x\cos(x)+\sin(x)\right]_0^1=\sin(1)-\cos(1)$$

ב. חשבו את e עד רמת דיוק של $h=0.01$.

נשתמש בפולינום טיילור של הפונקציה $f(x)=e^x$ סביב הנקודה המצוייה 0 ונקרב בנקודה הרצוייה $x=1$.

קיימת נקודה $0<c<1$ כך שהשגיאה בפיתוח מסדר n הינה

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}$$

כיוון שהפונקציה e^x מונוטונית עולה (נגזרתה חיובית), מתקיים כי:

$$|R_n|=\frac{e^c}{(n+1)!}\le\frac{e}{(n+1)!}$$

כעת, למדנו ש e הוא גבול הסדרה המונוטונית **<u>יורדת</u>** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, ולכן חסומה מלעיל על ידי האיבר הראשון שלה.

לכן מתקיים כי $4=\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1}\ge e$, ולכן $|R_n|\le\frac{e}{(n+1)!}\le\frac{4}{(n+1)!}$.

עבור $n=5$ נקבל כי $h=\frac{1}{100}=\frac{7}{700}<\frac{4}{720}=\frac{4}{6!}\ge|R_n|$.

לכן הקירוב הינו:

$$e=f(1)\approx f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2+\ldots+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}(1-0)^5=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{5!}\ .$$