תרגיל

תהי $g\left(z\right)$ פונקציה אנליטית בתוך ועל קונטור Γ(סגור ופשוט). נתון כי הראשית נמצאת בפנים של Γ, וגם לכל $z\in\Gamma$ $|z|<|g\left(z\right)|$. צ"ל: קיימת נק' שבת יחידה ל$g\left(z\right)$ בתור Γ.

הוכחה

נגדיר $f\left(z\right)=-z$. לפי הנתון $|g\left(z\right)|<|f\left(z\right)|=|-z|$ לכל $z\in\Gamma$ $\Leftarrow$ לפי משפט רושה: ל$f\left(z\right)$ ולפונקציה $\left(g+f\right)\left(z\right)$ יש אותו מספר אפסים.

לפונקציה $f\left(z\right)=z$ יש אפס אחד בראשית, והראשית(לפי הנתון) נמצאת בפנים של Γ $\Leftarrow$ ל$f\left(z\right)$ יש אפס אחד בפנים של Γ ולכן גם ל$g\left(z\right)-z=0$ יש אפס אחד בתוך Γ. כלומר ל$g\left(z\right)=z$ יש נקודת שבת יחידה בתוך Γ.

תרגיל

צ"ל: למשוואה $z=\lambda-e^{-z}$ ($\lambda>1$) יש פתרון יחיד בחצי המישור הימני.

הוכחה

$$g\left(z\right)=e^{-z}\qquad f\left(z\right)=z-\lambda$$

נבדוק התנהגות של $f\left(z\right)$ ו$g\left(z\right)$ על Γ_{R}(חצי המעגל השמאלי ברדיוס R מסביב לראשית). על חצי המעגל מתקיים

$$|f\left(z\right)|=|z-\lambda|\geq||z|-|\lambda||=R-\lambda>1$$

$$|g\left(z\right)|=\left|e^{-z}\right|=\left|e^{-x}\right|\left|e^{-iy}\right|=e^{-x}\leq1$$

מכאן, $|g\left(z\right)|<|f\left(z\right)|$ על חצי המעגל הימני. נבדוק קטע $[-iR,iR]$:

$$\left.\begin{array}{c}|f\left(z\right)|=|z-\lambda|\overset{x=0}{=}\sqrt{y^{2}+\lambda^{2}}>1\\|g\left(z\right)|=|e^{-z}|=e^{-x}\overset{x=0}{=}1\end{array}\right\}\Rightarrow|f|>g\left(z\right)\ \text{on}\ [-iR,iR]$$

$\Leftarrow$ $|g\left(z\right)|<|f\left(z\right)|$ על Γ_{R}, ולכן לפי משפט רושה מספר האפסים של $f\left(x\right)$ שווה למספר האפסים של $m(z$ $\left(f+g\right)$.

$f\left(z\right)=z-\lambda$ ולכן ל$f\left(z\right)$ יש אפס אחד $z=\lambda$. כיוון ש$R>\lambda+1$, $z=\lambda$ נמצא בתחום Γ_{R}.

$\Leftarrow$ ל$z-\lambda+e^{-z}$ ($z=\lambda-e^{-z}$) יש אפס אחד(פתרון אחד) בתוך Γ_{R}.

עבור R מספיק גדול($\to\infty$) יש פתרון אחד ויחיד בתוך Γ_{R} $\Leftarrow$ יש פתרון יחידה בחצי המישור הימני.

תרגיל

$$a>1\qquad I=\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}$$

פתרון

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \left[\begin{smallmatrix}\varphi=2\pi-\theta \\ \mathrm{d}\varphi=-\mathrm{d}\theta\end{smallmatrix}\right] = \int_{\pi}^{0} \frac{-\mathrm{d}\varphi}{a+\cos\left(2\pi-\varphi\right)} = \int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{a+\cos\varphi}$$

$$2I = \int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}}$$

נשתמש בהצבה סטנדרטית:

$$z = e^{i\theta}, \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} = \frac{\mathrm{d}z}{iz\left(a+\frac{z+z^{-1}}{2}\right)} = -i\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{2za+z^2+1}$$

נמצא אפסים של $z^2+2az-1$:

$$z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$$

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2-1}$$

$$z_2 = -a - \sqrt{a^2-1} \Rightarrow z_2 < -1 \Rightarrow |z_2| > 1$$

$\Leftarrow$ בתוך $|z|=1$ יש נקודה סינגולרית אחת $z=z_1$

$$-i\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2az+1} = -i\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(f,z_1\right) = 2\pi \lim_{z\to z_1}\left(z-z_1\right)f\left(z\right) = 2\pi\frac{1}{z_1-z_2} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2-1}}$$

תרגיל

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$$

פתרון

נגדיר $f\left(z\right)=\frac{1}{z^4+1}$. ל־$f\left(z\right)$ יש 4 קטבים פשוטים:

$$z_k=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}\qquad k=0,1,2,3$$

בתוך Γ_r יש סה"כ 2 נקודות: $\underbrace{e^{\frac{\pi}{4}i}}_{=z_0},\underbrace{e^{\frac{3\pi}{4}i}}_{=z_1}$

$$\int_{\Gamma_r}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}=2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f,z_0\right)+\operatorname{Res}\left(f,z_1\right)\right]\qquad(*)$$

נתבונן באינטגרל על Δ_r:

$$\left|\int_{\Delta_r}\frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z\right|\leq\pi r\cdot M=\frac{\pi r}{r^4-1}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$$

$$\left|f\left(z\right)\right|=\left|\frac{1}{z^4+1}\right|\leq\frac{1}{\left|\left|z^4\right|-1\right|}\overset{\text{on }\Delta_r}{=}\frac{1}{r^4-1}=M$$

$\Leftarrow$ לפי סנדוויץ $\int_{\Delta_r}\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\xrightarrow[r\to\infty]{}0$

$$\int_{\Gamma_r}f\left(z\right)=\int_{\Delta_r}f\left(z\right)+\int_{[-r,r]}\frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t\Rightarrow\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}f\left(z\right)=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$$

$$\operatorname{Res}\left(f,z_0\right)\overset{\substack{\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}\right)=\frac{g}{h'}\\ \text{on }\alpha\text{ simple}\\ \text{zero of }h}}{=}\left.\frac{1}{\left(z^4+1\right)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{1}{4z^4}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{4}$$

$$\operatorname{Res}\left(f,z\right)=\cdots=\frac{e^{-\frac{9\pi}{4}i}}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(f,z_0\right)+\operatorname{Res}\left(f,z_1\right)\right)=\frac{2\pi i}{4}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2i\right]=\boxed{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$