פתרון תרגיל בית 7 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. חשבו את חבורות גלואה הבאות ואת סריג תת־החבורות שלהן. מצאו גם את סריג תת־השדות של ההרחבות המתאימות.

א. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q})$

ב. $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^3 - 7$.

ג. $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^7 - 1$.

פתרון.

א. נשים לב ש-$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ הוא שדה הפיצול של הפולינום הספרבילי $(x^2+1)(x^2-2)$. מפני שאנחנו כבר יודעים כי $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}] = 4$, אז אנחנו גם יודעים שבחבורת גלואה יש 4 איברים. נבדוק האם היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ או $\mathbb{Z}_4$. נניח φ איבר בחבורת גלואה. אנחנו כבר יודעים שחייב להתקיים

$$\varphi(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}, \qquad \varphi(i) = \pm i$$

ולכן הסדר של φ בחבורת גלואה הוא לכל היותר 2. זה מחייב שחבורת גלואה היא $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. באופן שקול, ראינו כי חבורת גלואה במקרה כזה משוכנת ב-$S_2 \times S_2$ והיא מסדר 4.
שווה לציין שאנחנו גם יודעים די בקלות איך האוטומורפיזמים האלה נראים. אנחנו יודעים שבסיס ל-$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $1, \sqrt{2}, i, \sqrt{2}i$. לכן למשל איזומורפיזם ששולח

$$\sqrt{2} \to -\sqrt{2}, \qquad i \to -i$$

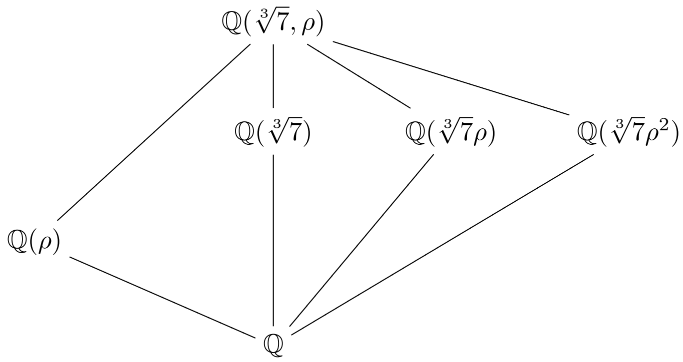
ישלח איבר כללי

$$\varphi(a + b\sqrt{2} + ci + d\sqrt{2}i) = a - b\sqrt{2} - ci + d\sqrt{2}i$$

סריג תת־השדות הוא

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}i) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(i) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

ב. יהי ρ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3. שורשי הפולינום הם $\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}\rho, \sqrt[3]{7}\rho^2$. מכאן קל לראות ששדה הפיצול של הפולינום הוא $E = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}, \rho]$. בפרט $[E:\mathbb{Q}] = 6$ כי $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]:\mathbb{Q}] = 3$ ו-$[\mathbb{Q}[\rho]:\mathbb{Q}] = 2$ זרים. בנוסף $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ משוכנת ב-S_3, שהיא חבורה מסדר 6 ולכן איזומורפית אליה. את סריג תת־החבורות של S_3 קל למצוא, ובעזרתו (והתאמת גלואה) נמצא את סריג תת־השדות



ג. יהי ρ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 7. אז כמו בכיתה, נקבל $E = \mathbb{Q}(\rho)$ והממד הוא $[E:\mathbb{Q}] = 6$. כמו כן יש איבר בחבורת גלואה שמקיים $\varphi(\rho) = \rho^2$. זה איבר מסדר 6 כי

$$\varphi^6(\rho) = \rho^{64} = \rho = \mathrm{id}(\rho)$$

וזו החזקה הכי נמוכה שזה קורה. לכן חבורת גלואה היא $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
בזמן פרסום הפתרון, אתם כבר יודעים כי $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho), \mathbb{Q}) \cong U_7 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. החבורה פועלת טרנזיטיבית על השורשים $\rho, \rho^2, \dots, \rho^6$. נסמן ב-$\varphi_k$ את האיבר בחבורת גלואה שמקיים

$$\varphi_k(\rho) = \rho^k$$

וראינו כי $k \mapsto \varphi_k$ הוא איזומורפיזם של חבורות. לחבורה $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ יש בדיוק שתי תת־חבורות לא טריוויאליות, שאיזומורפיות ל-$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. בנוסף, האיבר $\varphi_3 \in G$ הוא יוצר (כי 3 יוצר של U_7) ולכן φ_3^2, φ_3^3 יוצרים את תת־החבורות הנוספות של G. שני שדות הביניים שאנחנו מחפשים הם $E^{\varphi_3^2}, E^{\varphi_3^3}$. נחשב

$$\varphi_3^2(\rho) = \rho^2 \qquad \varphi_3^2(\rho^2) = \rho^4 \qquad \varphi_3^2(\rho^4) = 1$$

מכאן נסיק כי $\rho + \rho^2 + \rho^4$ מיוצב על ידי φ_3^2. לכן $\mathbb{Q}(\rho + \rho^2 + \rho^4) \subseteq E^{\varphi_3^2}$ ומשיקולי ממד יש שיוויון. באופן דומה אפשר לעשות אותו חישוב עבור φ_3^3 ולקבל

$$\varphi_3^3(\rho) = \rho^6 \qquad \varphi_3^3(\rho^6) = 1$$

ולכן משיקולים דומים $E^{\varphi_3^3} = \mathbb{Q}(\rho+\rho^6)$. סריג תת־השדות הוא

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(\rho) \arrow[dr, dash] \arrow[ddl, dash] & \\
 & & \mathbb{Q}(\rho+\rho^6) \arrow[ddl, dash] \\
\mathbb{Q}(\rho+\rho^2+\rho^4) \arrow[dr, dash] & & \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

שאלה 2. תהינה K/F ו-E/K הרחבות שדות.

א. נניח $[K:F]=2$ וש-F ממאפיין שונה מ-2. הוכיחו כי K/F הרחבת גלואה.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם E/F הרחבה נורמלית, אז E/K הרחבה נורמלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם E/F הרחבה נורמלית, אז K/F הרחבה נורמלית.

ד. הוכיחו או הפריכו: אם K/F הרחבה נורמלית ו-E/K הרחבה נורמלית, אז E/F הרחבה נורמלית. רמז: ראינו משהו בסעיף הראשון ובתרגיל בית 5.

פתרון.

א. כבר ראינו (בתרגיל בית 5 שאלה 5) שבהרחבה ממימד 2, השדה K חייב להיות שדה פיצול של פולינום מעל F. אז זו הרחבה נורמלית. נניח K הוא שדה פיצול של $f(x) = x^2+bx+c$. כמובן שיש ל-$f(x)$ שני שורשים שונים (אם היה לו שורש אחד, אז לפי נוסחת שורשים הוא היה $-\frac{b}{2}$ ואז $f(x)$ היה מתפצל כבר מעל F) ופה בעצם משתמשים בעובדה שהמאפיין שונה מ-2. לכן $f(x)$ ספרבילי. לכן ההרחבה היא הרחבת גלואה.

ב. הוכחה: במקרה כזה E הוא שדה פיצול. לכל $a \in E$ הפולינום המינימלי שלו $m_{a,F}$ מעל F מתפצל ב-E. הפולינום המינימלי $m_{a,K}$ שלו מעל K מחלק את $m_{a,F}$, ולכן גם מתפצל ב-E.

ג. הפרכה: ניקח $F=\mathbb{Q}$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ו-$E=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\rho)$ כאשר ρ שורש יחידה פרימיטבי מסדר 3. ההרחבה E/F היא נורמלית כפי שראינו בכיתה, כי היא שדה הפיצול של הפולינום x^3-2. אבל ההרחבה K/F לא נורמלית. הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ הוא x^3-2 (אי פריק לפי אייזנשטיין). לפולינום זה יש שורשים מרוכבים שאינם ב-K ולכן ההרחבה לא נורמלית. אגב ההרחבה E/K נורמלית לפי הסעיף הראשון.

ד. דהפרכה: ניקח $F=\mathbb{Q}$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ו-$E=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. שתי ההרחבות K/F ו E/K הן נורמליות כי לפי הסעיף הקודם הן ממימד 2. אבל ההרחבה E/F לא נורמלית. הפולינום המינימלי של $\sqrt[4]{2}$ הוא x^4-2 (אי פריק לפי אייזנשטיין). לפולינום זה יש שורשים מרוכבים שאינם ב-E ולכן ההרחבה לא נורמלית.

שאלה 3. קבעו האם ההרחבות הבאות הן נורמליות. אם לא, מצאו את הסגור הנורמלי שלהן.

א. $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

ב. $\mathbb{Q}[\rho]/\mathbb{Q}$ כאשר ρ הוא שורש יחידה מסדר 7. רמז: זה קל לפי השאלה הראשונה.

ג. $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}(t^3)$.

פתרון.

א. ההרחבה לא נורמלית כי הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא x^3-2 והשורשים הנוספים הם מרוכבים ולא שייכים לשדה.
הסגור הנורמלי הוא לספח את שאר השורשים (השורשים של הפולינום המינימלי של $\sqrt{2}$ כבר שייכים לשדה): $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\rho_3,\sqrt[3]{2}\rho_3^2\right]=\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\rho_3\right]$.

ב. ההרחבה היא נורמלית, כי השורשים של הפולינום המינימלי של ρ הם ρ^i שכולם שייכים לשדה. מדובר באותם חישובים כמו בסעיף השלישי בשאלה הראשונה.

ג. הפולינום המינימלי של t מעל $\mathbb{Q}(t^3)$ הוא x^3-t^3 ששורשיו המרוכבים לא שייכים לשדה, ולכן ההרחבה לא נורמלית. הסגור הנורמלי הוא $\mathbb{Q}(t,\rho_3)$ כאשר ρ_3 הוא שורש יחידה מסדר 3.

בהצלחה!