תכנות דינאמי

בתכנות דינאמי שומרים את הפתרונות לתתי הבעיות בזיכרון, כדי שלא נצטרך לחשב אותם יותר מפעם אחת.

בעיית פס הייצור הנע

יש לנו שני פסי יצור - פס 1 ופס 2, ואפשר להעביר מוצר באמצע מפס לפס - עם עלות מסויימת. מעבר מוצר בין תחנות באותו פס לא עולה כלום - אבל העבודה בתחנות כן עולה, והביקור בתחנה כן עולה. צריך להחליט איך עוברים בין התחנות.

a_{ij}	עלות עבודה בפס i תחנה j
t_{ij}	עלות מעבר מפס i תחנה j לפס $3-i$ תחנה $j+1$
e_i	זמן אתחול בפס i
x_i	זמן סיום בפס i

$$e_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + x_i$$

1) אלגוריתם נאיבי

לעבור על כל 2^n האפשרויות. הזמן לחישוב כל אפשריות: $O(n)$. הזמן של הפתרון הנאיבי - $O(n2^n)$. מספיק להגיד $\Omega(2^n)$.

2) פתרון רקורסיבי

$f(i,j)$ - הזמן המינימלי לעבודה שמסתיים בפס i בתחנה j.

$$f(i,j) = \min\{f(i,j-1) + a_{ij}, f(3-i,j-1) + t_{3-i} + a_{ij}\}$$

$$f(i,1) = e_i + a_{i1}$$

$$f(1,n)$$

$$f(2,n)$$

הפתרון הסופי הוא:

$$f^* = \min\{f(1,n) + x_1, f(2,n) + x_2\}$$

$$T(n) = 2T(n-1) + \theta(1) \to \theta(2^n)$$

הוכחת הנוסחא הרקורסיבית

באינדוקציה על התחנה הk. כלומר, בכל שלב נוכיח ש$f\left(i,k\right)$ הוא הפתרון האופטימלי המסתיים בפס i בתחנה k. נוכיח רק ל$f\left(1,k\right)$, ו$f\left(2,k\right)$ הוא בצורה דומה.

בסיס$k=1$: צריך להוכיח נכונות $f\left(1,1\right)$.

$$f\left(1,1\right)=e_1+a_{11}$$

זו האפשריות היחידה ולכן תנאי העצירה נכון.

בסיס$k=2$: $f\left(1,2\right)=\min\left\{f\left(1,1\right)+a_{12},f,\left(2,1\right)+t_{21}+a_{12}\right\}=$

$$=\min\left\{e_1+a_{11}+a_{12},e_2+a_2+t_{21}+a_{12}\right\}$$

מתקיים לפי מבנה השאלה: יש שתי אפשרויות לסיים בפס 1 תחנה 2, ואנחנו לוקחים את האפשרות המינימלית.

נניח שהנוסחאות $f\left(i,j\right)$ נכונות לכל $j\leq k-1$. נוכיח: הנוסחאות $f\left(i,k\right)$ נכונות. נניח שהפתרון שקיבלנו מהאלג' הוא $C=f\left(1,k\right)$. נניח בשלילה שהאלג' לא נותן פתרון אופטימלי, כלומר קיים פתרון $f'\left(1,k\right)=C'$ ומתקיים $C'<C$.
נסתכל בסידור שעבורו $f'\left(1,k\right)=C'$. יש שתי אפשרויות:

1. הגענו מפס 1 מתחנה $k-1$. מכאן $f'\left(1,k-1\right)=C'-a_{ik}$. לפי הנחת האינדוקציה $f\left(1,k-1\right)$ הוא הפתרון האופטימלי(=הזמן המינימלי), לכן $f\left(1,k-1\right)\leq C'-a_{1k}$.
מה נקבל מהאלג':

$$C=f\left(1,k\right)=\min\left\{f\left(1,k-1\right)+a_{1k},f\left(2,k-1\right)+t_{2,k-1}+a_{1k}\right\}$$

$$\leq f\left(1,k-1\right)+a_{1k}\leq C'-a_{1k}+a_k=C'\Rightarrow C\leq C'$$

$\Leftarrow$סתירה להנחה $C'<C$. ז"א שC פתרון אופטימלי.

2. הגענו מפס 2 מתחנה $k-1$. לכן

$$f'\left(2,k-1\right)=C'-t_{2,k-1}-a_{1k}$$

מהנחת האינדוקציה:

$$f\left(x,k-q\right)\leq C'-t_{1,k-1}-a_{1k}$$

ועושים אותו דבר כמו קודם, ושוב מגיעים לסתירה.

קיבלנו ש$f\left(1,n\right)$ ו$f\left(2,n\right)$ הם פתרונות אופטימליים, ולכן $f^*=\min\left\{f\left(1,n\right)+x_1,f\left(2,n\right)+x_2\right\}$ יתן לנו את הזמן המינימלי.

3) אלגוריתם תכנות דינאמי

מבנה הנתונים:

מערך דו מימדי בגודל $n\times 2$ שבו בתא $F\left[i,j\right]$ תהיה העלות המינימלית של מסלול המסתיים בפס i בתחנה j.

אופן מילוי:

בשביל $F\left[i,j\right]$ אנחנו צריכים את $F\left[i,j-1\right]$ ו$F\left[3-i,j-1\right]$. לכן נמלא את מבנה הנתונים לפי סדר תחנות.

האלגוריתם

1. אתחול $F\left[1,1\right]=e_1+a_{11}, F\left[2,1\right]=e_2+a_2$
2. עבור j מ2 עד n בצע:
   - 2.1 אם $F\left[1,j-1\right]+a_{1j}\leq F\left[2,j-1\right]+t_{2,j-1}+a_j$
     - 2.1.1 אז $F\left[1,j\right]=F\left[1,j-1\right]+a_{1j}$, $L\left[1,j\right]=1$
   - 2.2 אחרת $F\left[1,j\right]=F\left[2,j-1\right]+t_{2,j-1}+a_{ij=1j}$, $L\left[1,j\right]=2$
   - 2.3 אם $F\left[2,j-1\right]+a_{2j}\leq F\left[1,j-1\right]+t_{1,j-1}$
     - 2.3.1 אז $F\left[2,j\right]=F\left[2,j-1\right]+a_{2j}$, $L\left[2,j\right]=2$
   - 2.4 אחרת $F\left[2,j\right]=F\left[1,j-1\right]+t_{1,j-1}+a_{2j}$, $L\left[2,j\right]=1$
3. החזר: $\min\left\{F\left[1,n\right]+x_1,F\left[2,n\right]+x_2\right\}$

זמן

$O\left(n\right)$ כי עוברים על כל התחנות ומבצעים $O\left(1\right)$ פעולות בכל תחנה.

מקום

$O\left(n\right)$ כי שומרים את המערך בגודל $2\times n$.

אם לא משתמשים במערך L(שמשמש רק בשביל לשמור את המסלול), אפשר לחסוך במקום כי נשמור רק את שתי התחנות האחרונות שרק אותן צריך לרקורסיה - $O\left(n\right)$ מקום.

שחזור פתרון

$L\left[i,k\right]$ - הפס שבו הייתה התחנה הקודמת עבור פתרון אופטימלי שהסתיים בפס i תחנה j.

$L\left[i,j\right]$ הוא מערך בגודל $2\times n$.

בעיית העברת הודעה על עץ

נתון עץ בינארי מושרש T עם n קודקודים ושורש root.

בשורש יש הודעה M שרוצים להעביר לכל קודקודי העץ. העברת הודעה היא בכל שלב מאב לאחד הבנים שלו. הזמן להעברת הודעה מאב לבן היא יחידת זמן אחת. רוצים למצוא את הזמן המינימלי שידרש להעברת ההודעה M לכל קודקודי העץ.

פתרון נאיבי

אם יש t קודקודים עם 2 בנים אז מס' האפשרויות הוא 2^t. אם $t=O\left(n\right)$ אז מס' האפשרויות הוא a^n עבור $1<a\leq 2$ - כלומר זמן אקספוננציאלי.

אלגוריתם רקורסיבי

$t(u)$ הזמן המינימלי שלוקח לקודקוד u להעביר את ההודעה לכל התת-עץ שלו.

$u.right$ הבן הימני

$u.left$ הבן השמאלי.

אם יש בן יחיד - $t(u)=t(u.left)+1$
אם יש שני בנים:

$$t(u)=\min\left\{\begin{array}{c}\max\{t(u.left)+1,t(u.right)+2\}\\ \max\{t(u.left)+2,t(u.right)+1\}\end{array}\right\}$$

הוכחת הנוסחה הרקורסיבית

טענת האינדוקציה: $t(u)$ מחושב נכון לכל u בעץ. נוכיח באינדוקציה על k מספר הקודקודים בכל תת עץ:

$k=1$ יש עלה. $t(u)=0$

$k=2$ יש עלה ואב. הזמן הוא $t(u)=t(u.left)+1=0+1=1$

$k=3$ נסתכל על המקרה אב עם שני בנים. $t(u)=\cdots=2$

נניח ש$t(u)$ נכון לכל תת עץ עד גודל $k-1$. נוכיח לעץ בגודל k:
נניח קיבלנו לפי האלג' שלעץ שהשורש שלו u וגודלו k מתקיים $t(u)=C$. נניח בשלילה שהאלגוריתם לא נותן פתרון אופטימלי. כלומר יש פתרון $C'<C$, $t'(u)=C'$.
אם לו u יש בן יחיד: $u.left$, אז $t'(u.left)=C'-1$, כלומר באלג' נקבל $t(u.left)\leq C'-1$

$$C=t(u)=t(u.left)+1\leq C'-1+1=C'\Rightarrow C\leq C'$$

אם יש שני בנים: יש שתי אפשרויות:

1. הבן השמאלי נבחר ראשון.
או: $t'(u.left)=C'-1$ ו$t'(u.right)\leq C'-2$
או: $t'(u.left)\leq C'-1$ ו$t'(u.right)=C'-2$
$\Leftarrow$לפי הנחת האינדוקציה(נשתמש כי שני גדלי העצים של $u.left$ ו$u.right$ קטנים מk):

$$t(u.left)\leq C'-1$$

$$t(u.right)\leq C'-2$$

$$\max\{t(u.left)+1,t(u.right)+2\}\leq\max\{C'-1+1,C'-2+2\}=C'$$

$$\max\{t(u.left)+2, t(u.right)+1\} \le \max\{C'-1+2, C'-2+1\} = C'+1$$

$$C = t(u) \le \min\{C', C'+1\} = C' \Rightarrow C \le C'$$

2. אם הבן הימני נבחר ראשון - אותו דבר רק הפוך.