

## משפט

שפה  $L$  ניתנת לזיהוי אמ"ס  $L$  ניתנת למניה.

## הוכחה

ניתנת למניה  $\Leftarrow$  ניתנת לזיהוי: בשיעור הקודם.  
כיוון שני: תהי  $M_L$  מכונה שמזהה את  $L$  (המכונה האדומה). נבנה  $M_E$  שמונה את  $L$  (המכונה השחורה).

נרצה לעבור על כל האפשרויות של הא"ב, ולבדוק מילה מילה בעזרת  $M_L$ . אם היא מהשפה - להדפיס אותה. אם נעבור לפי סדר לקסיקוגרפי לא נגיע לכל המילים - למשל אם  $\Sigma = \{a, b\}$ , אז הסדר הלקסיקוגרפי יהיה  $a, aa, aaa, aaaa, \dots$  ו לעולם לא נגיע ל  $b$ , כי יש אינסוף רצפים של  $a$ . לכן נשתמש בסדר אחר:

סדר המנייה על  $\Sigma^*$  - סדר לפי אורך המילה, ובכל אורך נתון, לפי סדר לקסיקוגרפי. לכן נריץ מילה מילה מהשפה בסדר המניה. כל מילה סרט המילים נעתיק לסרט הסימולציה, נריץ את המכונה האדומה על המילה, ואם התשובה היא כן - נפלוט אותה לסרט הפלט, ובכל אופן נמשיך למילה הבאה.

בעיה - מה אם ניתקע על מילה מסויימת? במקרה הזה לעולם לא נגיע למילה הבאה. אם המכונה האדומה הייתה מכונה להכרעה לא הייתה הבעיה הזו, אבל היא לא - ולכן אנחנו צריכים למצוא דרך לדעת מתי המכונה נתקעת.

היינו רוצים ליצור TimeOut שברגע שנעבור אותו - המכונה האדומה תפסיק ותעבור למילה הבאה. אבל אנחנו לא יכולים לעשות את זה, כי בהגדרה מספר הצעדים הדרושים למכונה כדי לקבל מילה אינו מוגבל.

לכן מה שנעשה זה להוסיף סרט נוסף - סרט מונה. בכל פעם שבמונה יש  $x$ , נבדוק את כל המילים של עד  $x$  תווים ועד  $x$  צעדים - זה יתבצע במספר סופי של צעדים, ולכן מובטח לנו שזה יסתיים ונוכל לקדם את המונה. כמו כן, לכל מילה הניתנת לזיהוי יש מספר סופי של אותיות ואפשר לזהות אותה במספר סופי של צעדים, ולכן בשלב מסויים המונה יעבור את שני המספרים האלה ונוכל לזהות אותה.

## פעולות $M_E$

למכונה  $M_E$  ארבעה סרטים:

1. סרט פלט

2. סרט סימולציה

3. סרט מילים

4. סרט מונה

המכונה תרוץ בצורה הבאה:

1. כתוב \$1 בסרט מונה
2. א. בצע סימולציה (הרץ) את המכונה  $M_L$  על תוכן הסרט "סימולציה", מספר צעדים כפי שמופיע בסרט "מונה"  
ב. אם באיזהו שלב בריצה המכונה  $M_L$  הגיעה למצב מקבל אז העתק תוכן סרט מילים לסרט פלט והוסף #.

- ג. כתוב לסרט "מילים" את המילה הבאה לפי סדר המניה.
- ד. בדוק האם אורך המילה בסרט מילים גדול מהמונה בסרט "מונה".  
 אם כן עבור לשלב (3) אחרת מחק תוכן סרט סימולציה, העתק תוכן סרט מילים לסרט סימולציה וחזור לשלב (2) א
3. הגדל מונה שבסרט "מונה" ב"1". מחק תוכן סרט סימולציה ותוכן סרט "מילים" וחזור ל(2)

### מתקיים

- אם  $w$  בפלט  $M_E$  אזי  $w$  נפלט(וונכתב) בשלב 2.ב, בגלל שהמכונה  $M_L$  הגיעה למצב מקבל על  $w \in M_L \leftarrow w$  מאשרת את  $w \in L \leftarrow w$
- אם  $M_L \leftarrow w \in L$  מאשרת את  $w$ . נניח ש  $M_L$  מאשרת את  $w$  במ צעדים. נסמן  $K = \max\{m, |w|\}$ . אזי כשהמונה בסרט "מונה"  $K \leq$  הקלט  $w$  ניתן למכונה  $M_L$  בסימולציה ו  $M_L$  רצה על  $w$  עד למצב קבלה  $w \in M_L$  נפלט בפלט של  $M_E$  כנדרש ■

## מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית

מ"ט לא דטרמיניסטית היא מודל אבסטרקטי - לא יכול להיות דבר כזה, כי זו מכונה ש"בוחרת" מה לעשות במקרים מסויימים. זה מודל תיאורטי.  
 מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית זו מכונה שלא תמיד נקבע אחד לאחד מה היא צריכה לעשות בכל צעד. לפי מה היא בוחרת מה לעשות? יש לה סוג של "בחירה חופשית", ואנחנו לא יכולים לצפות מה היא תעשה.  
 למכונת טיורינג לא דטרמיניסטית יש בכל שלב מספר אפשרויות, והיא בוחרת אחת מהן, ובסופו של דבר היא אומרת כן או לא.  
 בסופו של דבר, גם אם המכונה אומרת לא, יכול להיות שיש חישוב אחר להגיע לכן.

### דוגמה

$$L = \{w^k \mid k \geq 2, w \in \{a, b\}^*\}$$

$$aabb \notin L$$

$$ababab \in L$$

$$aaaaa \in L$$

$$abaabaab \notin L$$

איך תראה מכונה לא דטרמיניסטית שמבצעת את הפעולה הזו? נרצה לנחש את האורך של המילה, ולבדוק אם היא חוזרת על עצמה. המכונה תשתמש בשני סרטים - סרט הקלט, וסרט נוסף שבו נכתוב את המילה  $\alpha, \beta \in \{a, b\}$ :

מצב	צ'בו" I	תוכן II	מצב חדש	ו'צ'בו" I	כתיבה II	תזוזה I	תזוזה II
$q_0$	$a$	-	$q_1$	$a$	$a$	$R$	$R$
$q_0$	$b$	-	$q_1$	$b$	$b$	$R$	$R$
$q_0$	-	-	$q_1$	-	-	$R$	$R$
$q_1$	$a$	-	$q_1$	$a$	$a$	$R$	$R$
$q_1$	$b$	-	$q_1$	$b$	$b$	$R$	$R$
$q_1$	$a$	-	$q_2$	$a$	-	$S$	$L$
$q_1$	$b$	-	$q_2$	$b$	-	$S$	$L$
$q_1$	-	-	$q_{rej}$	-	-	$S$	$S$
$q_2$	$\alpha$	$\beta$	$q_2$	$\alpha$	$\beta$	$S$	$L$
$q_2$	$\alpha$	-	$q_3$	$\alpha$	-	$S$	$R$
$q_3$	$\alpha$	$\alpha$	$q_3$	$\alpha$	$\alpha$	$R$	$R$
$q_3$	$\alpha$	$\beta$	$q_{rej}$	$\alpha$	$\beta$	$S$	$S$
$q_3$	$\alpha$	-	$q_2$	$\alpha$	-	$S$	$L$
$q_3$	-	-	$q_{ac}$	-	-	$S$	$S$

המילה נמצאת בשפה אמ"ם קיים חישוב שיוביל לתוצאה  $q_{ac}$

## הגדרה - מ"ט לא דטרמיניסטית

מ"ט לא דטרמיניסטית הינה שביעיה  $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{ac}, q_{rej})$  כאשר

$Q$  קבוצת מצבים סופית

$\Sigma$  א"ב קלט

$\Gamma$  א"ב מכונה

$q_0, q_{ac}, q_{rej}$  כמו במ"ט רגילה.

ו  $\Delta \subseteq ((Q \setminus \{q_{ac}, q_{rej}\}) \times \Gamma) \times (Q \times (\Gamma \cup \{L, R\}))$  כלומר במקום פונקציה כמו במ"ט דטרמיניסטית, כאן זהו יחס.

## הגדרה

תהי  $N$  מ"ט ל"ד ותהי  $w \in \Sigma^*$ . נאמר כי  $N$  מאשרת את  $w$  אם קיים חישוב של  $N$  על  $w$  שמגיע למצב  $q_{ac}$ .

תהי  $L$  שפה. נאמר כי  $N$  מזהה את  $L$  אם לכל  $w \in \Sigma^*$ ,  $N$  מאשרת את  $w$  אם"ם  $w \in L$ .

## האם הוספנו כוח?

האם מכונה לא דטרמיניסטית חזקה יותר ממכונה דטרמיניסטית? האם ישנן שפות שניתן לזהות עם מכונה לא דטרמיניסטית, אבל לא עם מכונה דטרמיניסטית?

התשובה היא לא!

## משפט

תהי  $L$  שפה.  $L$  ניתנת לזיהוי ע"י מ"ט דט' אם  $L$  ניתנת לזיהוי ע"י מ"ט ל"ד.

## הוכחה

דט'  $\Leftarrow$  לא דט' - כי מכונה דט' הינה בפרט גם מכונה לא דט'.

לא דט'  $\Leftarrow$  דט':

תהי  $N$  מ"ט לא דט' שמזהה את  $L$  (מכונה אדומה)

יהיו לנו 3 סרטים - סרט קלט, סרט סימולציה וסרט בחירה. בסרט הבחירה ניצור את כל המחרוזות של כל סדרות הבחירות האפשריות. כל פעם נבצע את כל הבחירות לפי מה שכתוב בסרט הבחירה, ואז נעבור לאפשרות הבאה בסרט הבחירה לפי סדר מניה.

## $M_L$ מבנה

ל  $M_L$  שלושה סרטים: "קלט", "סימולציה" ו"בחירה".

יהי  $K$  מספר השורות המקסימלי בטבלת המעברים  $\Delta$  (של  $N$ ) עם "מצב" ו"תוכן" זהים.

## פעילות $M$

1. כתוב \$1 על סרט "בחירה"
2. א. העתק קלט מסרט "קלט" לסרט סימולציה.  
ב. הרץ את  $N$  על סרט "סימולציה", צעד צעד.  
יהי  $i$  המספר שבמשבצת שבמיקום הראש בסרט "בחירה". בסימולציה של  $N$  על הסרט שלה, בחר את האפשרות הזית מתוך האפשרות ויות (אם יש כזו. אם לא, עבור לשלב (3)) וקדם את הראש בסרט "בחירה" משבצת אחת ימינה.
- ג. אם בסימולציה הגיע ל  $q_{ac}$  של  $N$  אזי  $M$  ג"כ עוברת ל  $q_{ac}$ .
- ד. אם הראש בסרט "בחירה" רואה "." אז עבור לשלב (3).
3. כתוב בסרט "בחירה" את המחרוזת הבאה לפי סדר המניה מעל הא"ב  $\{1, \dots, k\}$ . מחק סרט סימולציה וחזור לשלב (2)

נשים לב שבכל ריצה של (2) המכונה מבצעת את הבחירות לפי הסרט - גם אם זה אומר שהיא עוצרת באמצע.

## הגדרה

תהי  $N$  מ"ט ל"ד ו  $L \subseteq \Sigma^*$  שפה. נאמר כי  $N$  מכריעה את  $L$  אם  $N$  מזהה את  $L$  ו  $N$  עוצרת לכל קלט - כלומר אין ל  $N$  חישובים שלא עוצרים.

## **משפט**

כל שפה שניתנת להכרעה ע"י מכונה ל"ד, ניתנת להכרעה ע"י מכונה דט'