תזכורת

מד"ר מסדר ראשון - $F(x,y,y')=0$.
מד"ר מסדר ראשון בצורה נורמלית - $y'=f(x,y)$

דוגמאות

$y'=f(x)g(y)$ - משוואה ניתנת לפרידה
$y'=a(x)y+b(x)$ - מש. לינארית($b=0$ "הומוגנית", $b\neq 0$ "לא הומוגנית")
$y'=\left(\frac{y}{x}\right)$ - מש. הומוגנית

מש. ברנולי Bernoulli equation

$y'=a(x)y+b(x)y^{k+1}$ [$k=-1$ לא לינארי, $k=0$ לינארי הומוגני]
הצבה $z=\frac{1}{y^k}$

$$z'=\frac{-ky'}{y^{k+1}}=\frac{-k}{y^{k+1}}\left(a(x)y+b(x)y^k\right)=\overbrace{-ka(x)z-kb(x)}^{linear!!!}$$

מש. ריקטי Riccati Equation

$y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$ - באופן כללי לא ניתן לפתור ע"י פעולות סטנדרטיות(של חיבור, כפל, חזקה, אינטגרל...)
בהינתן פתרון פרטי $y_0(x)$ ניתן למצוא פתרון כללי.
איך? הצבה: $y(x)=y_0(x)+z(x)$.

$$y_0'+z'=a(x)(y_0+z)^2+b(x)(y_0+z)+c(x)=$$

$$=a(x)y_0^2+b(x)y_0+c(x)+2a(x)y_0z+a(x)z^2+b(x)z$$

היות וy_0 הוא פתרון,

$$z'=(2a(x)y_0(x)+b(x))z+a(x)z^2$$

זה מש. ברנולי עם $k=1$. נציב $w=\frac{1}{z}$ ונמשיך הלאה.

דוגמה

$y' = 3 + 3x^2y - xy^2$. פתרון פרטי - $y = 3x$.

הצבה ראשונה $y = 3x + z$

$$3 + z' = 3 + 3x^2(3x + z) - x(3x + z)^2$$

$$z' = 3x^2 z - x\left(6xz + z^2\right)$$

$$z' = -xz^2 - 3x^2 z$$

זה ברנולי עם $k = 1$. הצבה שנייה $w = \frac{1}{z}$

$$w' = \frac{-z'}{z^2} = \frac{xz^2 + 3x^2 z}{z^2} = x + 3x^2 w$$

[המקרה ההומוגני: $w' = 3x^2 w$

$$\frac{w'}{w} = 3x^2$$

$$\ln w = x^3 + c$$

$$w = ke^{x^3}$$

c) קבוע, k קבוע אחר)]

הצבה שלישית $w = e^{x^3}k(x)$ (הפעם k זה פונקציה - אפשר היה גם לתת לה שם אחר, למשל $w = e^{x^3}v$)

$$e^{x^3}k' + 3x^2e^{x^3}k = x + 3x^2e^{x^3}k$$

$$k' = xe^{-x^3}$$

$$k = \int xe^{-x^3}dx + C$$

$$w = e^{x^3}\left(\int xe^{-x^3}dx + C\right)$$

$$z = \frac{1}{w}, y = 3x + z = 3x + \frac{1}{w}$$

$$\boxed{y = 3x + \frac{e^{-x^3}}{\int xe^{-x^3}dx + C}}$$

מש. קלרו Clairaut's Equation

$y = xy' + f(y')$ (f כללי לא בצורה נורמלית)

נתחיל לחפש פתרונות פשוטים. פתרון פרטי: $y = f(0)$ (קבוע) (כי אז $y' = 0$)

נחפש פתרון בצורה $y = \alpha x + \beta$ (α, β קבועים).

$$\alpha x + \beta = x\alpha + f(\alpha)$$

אכן פתרון אם $\beta = f(\alpha)$, לכן $y = \alpha x + f(\alpha)$ פתרון לכל קבוע α.

זה פתרון לכל α, אבל מתברר שיש עוד פתרון נוסף ("פתרון סינגולרי").

כדי לראות את זה, נלמד קצת על משפחות של ישרים.

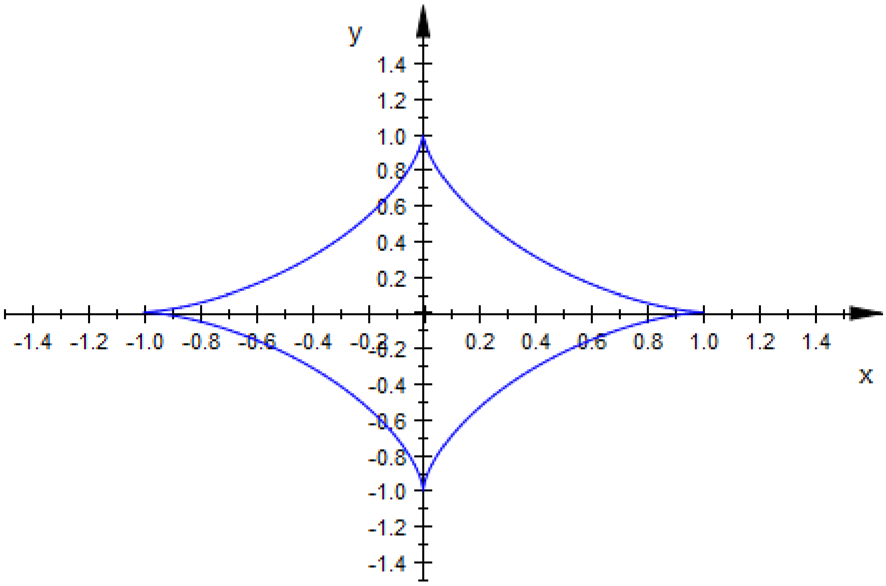
נסתכל על משפחת הישרים בעלי אורך 1 המחברים בין ציר הx החיובי וציר הy החיובי. אם הם נוגעים בציר הy בנקודה $(0, s)$, הם יגעו בציר הx בנקודה $\left(\sqrt{1-s^2}, 0\right)$. כלומר משפחת הישרים $\left\{y = s - \frac{sx}{\sqrt{1-s^2}}, 0 \le s \le 1\right\}$. המעטפת של הישרים האלה מייצרת עקומה. מהי משוואת העקומה? כל נקודה של המעטפת היא חיתוך של שני ישרים עם sים קרובים במשפחה הזו.

המעטפת היא קבוצת הנקודות שהן חיתוך של ישר עם פרמטר s, וישר עם פרמטר $s + ds$. המעטפת של העקומות $F(x, y, s) = 0$ היא החיתוך של $\begin{cases} F(x,y,s) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial s}(x,y,s) = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = s - \frac{sx}{\sqrt{1-s^2}} \\ 0 = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-s^2}} - \frac{s^2 x}{\left(1-s^2\right)^{3/2}} = 1 - \frac{x}{\left(1-s^2\right)^{3/2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \left(1-s^2\right)^{3/2} \\ y = s^3 \end{cases}$$

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = 1}$$



, כי $|x|^{2/3}+|y|^{2/3}=1$ נראה כך:

נחזור למש. קלרו

יש פתרונות $y=\alpha x+f(\alpha)$. האם יש למשפחה זו של ישרים מעטפת? המעטפת היא העקומה

$$\begin{cases} y=\alpha x+f(\alpha) \\ 0=x+f'(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-f'(\alpha) \\ y=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha) \end{cases}$$

$y=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$ זו עקומה פרמטרית - גם פתרון של קלרו.

סוג אחד של מד"ר מסדר שניים

מד"ר מסדר שניים: $F(x,y,y',y'')=0$. בצורה נורמלית: $y''=f(x,y,y')$

נסתכל על המקרה $y''=f(y,y')$ - אין תלות על x. ניתן להביא את המשוואה הזאת למד"ר מסדר ראשון. במקום להתייחס ל$y(x)$ כפונקציה של x, ו$y'(x)$ כפונקציה של x, ו$y''(x)$ כפונקציה של x, נסתכל על y' כפונקציה של y. נכתוב $y'=p(y)$. לייתר דיוק $y'(x)=p(y(x))$.

$$y''(x)=p'(y(x))\,y'(x)=p'(y(x))\,p(y(x))$$

$$y''=f(y,y')\Rightarrow pp'=f(y,p)\Rightarrow p'=\frac{f(y,p)}{p}$$

קיבלנו מד"ר מסדר ראשון, אותו אולי ניתן לפתור.

דוגמה

$$y''=-y$$

נכתוב:

$$y'=p\left(y\right)$$

$$y''=pp'$$

$$pp'=-y$$

$$\left(\frac{1}{2}p^{2}\right)'=-\left(\frac{1}{2}y^{2}\right)'$$

$$\frac{1}{2}p^{2}=-\frac{1}{2}y^{2}+C$$

$$y'^{2}=C-y^{2}$$

לא מצורה נורמלית - אבל פה קל לטפל

$$y'=\pm\sqrt{C-y^{2}}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{C-y^{2}}}=\pm1$$

נוציא אינטגרל

$$\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{C}}\right)=\pm x+D$$

(D קבוע[שני])

מד"רים מסדר שני

מילון

מד"ר מסדר 2: $F\left(x,y,y',y''\right)=0$(*), $F:\mathbb{R}^{4}\to\mathbb{R}$

מד"ר מסדר 2 בצורה נורמלית: $y''=f\left(x,y,y'\right)$, $f:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}$.

פתרון של (*) זה פונקציה $y\left(x\right)$ מוגדרת על קטע $I\subseteq\mathbb{R}$ כך ש- $F\left(x,y\left(x\right),y'\left(x\right),y''\left(x\right)\right)=0$ $\forall x\in I$.

יש הכללה לסדר 3,4 וכו'

מושגים

פתרון כללי פתרון עם קבועים חופשיים שמהווה את כל הפתרונות של המד"ר.

בעיית קושי למד"ר מסדר שניים מצא פתרון של $y''=f\left(x,y,y'\right)$ כך ש $\begin{cases} y\left(x_0\right)=y_0 \\ y'\left(x_0\right)=p_0 \end{cases}$, x_0,y_0,p_0 נתונים.

[$y''=0 \Leftarrow y'=C \Leftarrow y=Cx+D$, C,D קבועים. לסדר שניים יש בד"כ 2 קבועים חופשיים, לסדר 3 יש בד"כ 3 קבועים חופשיים וכו']

בעיית קושי לסדר 3

מצא y כך ש$y'''=f\left(x,y,y',y''\right)$. $\begin{cases} y\left(x_0\right)=y_0 \\ y'\left(x_0\right)=p_0 \\ y''\left(x_0\right)=q_0 \end{cases}$, x_0,y_0,p_0,q_0 נתונים.

וכן סדר יותר גבוה...

מד"ר לינארי מסדר 2

מד"ר בצורה לינארית: $a_2\left(x\right)y''+a_1\left(x\right)y'+a_0\left(x\right)y\left(x\right)=b\left(x\right)$, $a_0\left(x\right),a_1\left(x\right),a_2\left(x\right),b\left(x\right)$ נתונים.

אם $b\left(x\right)=0$ - הומוגני. אחרת אי־הומוגני.

נקודות x שבהן $a_2\left(x\right)=0$ נקראות נקודות סינגולריות.

נקודות אחרות הן נק' לא־סינגולריות.

אותו דבר לגבי סדר 3:

מד"ר בצורה לינארית: $a_3\left(x\right)y'''+a_2\left(x_0\right)y''+a_1\left(x\right)y'+a_0\left(x\right)y\left(x\right)=b\left(x\right)$, $a_0\left(x\right),a_1\left(x\right),a_2\left(x\right),a_3\left(x\right),b\left(x\right)$ נתונים.

אם $b\left(x\right)=0$ - הומוגני. אחרת אי־הומוגני.

נקודות x שבהן $a_3\left(x\right)=0$ נקראות נקודות סינגולריות.

נקודות אחרות הן נק' לא־סינגולריות.

וכן הלאה

משפט הקיום והיחידות לסדר 2

$$y''=f\left(x,y,y'\right)$$

$$y\left(x_0\right)=y_0$$

$$y'\left(x_0\right)=p_0$$

אם $f(x,y,p)$ היא רציפה על "תיבה" מהצורה $D=\{(x,y,p)||x-x_0|\le\alpha,|y-y_0|\le\beta,|p-p_0|\le\gamma\}$, $\alpha,\beta,\gamma\ge 0$ וגזירה עם נגזרת רציפה ביחס ל(y,p) אזי קיים פתרון אחד ויחיד של בעיית קושי המוגדרת על קטע פתוח הכולל x_0.
הוכחה בעתיד, נשתמש עכשיו!!

פרק 2. מד"ר לינארי מסדר 2 ומעלה

משוואה לינארית מסדר 2

$$a_2(x)\,y''+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=b(x)$$

משוואה לינארית מסדר n

$$a_n(x)\,y^{(n)}+...+a_2(x)\,y''+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=b(x)$$

$b(x)=0$ - הומוגנית.
$b(x)\neq 0$ - אי הומוגנית.

משפט

1. קבוצת הפתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית היא מרחב וקטורי
2. קבוצת הפתרונות של מד"ר לינארית אי־הומוגנית ניתן לכתוב בצורה $y_p(x)+y_c(x)$ כאשר $y_p(x)$ הוא פתרון <u>פרטי</u> של האי־הומוגני, ו$y_c(x)$ זה פתרון <u>כללי</u> של ההומוגנית[1].

הוכחה

1. נניח ש$y_1(x)$ ו$y_2(x)$ הם פתרונות של המד"ר הלינארית ההומוגנית, ו$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$. אזי

$$a_n(x)\,y_1^{(n)}+...+a_1(x)\,y_1'+a_0(x)\,y_1=0$$

$$a_n(x)\,y_2^{(n)}+...+a_1(x)\,y_2'+a_0(x)\,y_2=0$$

ולכן

$$a_n(x)\,(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)^{(n)}+...+a_1(x)\,(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)'+a_0(x)\,(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=0$$

כלומר $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2$ הוא גם פתרון. לכן הקבוצה של הפתרונות היא סגורה תחת חיבור של פונקציות וכפל ע"י סקלרים ומהווה מרחב ווקטורי.

[1] הפתרון הפרטי מסומן ע"י p - private. הפתרון הכללי מסומן ע"י c - complementary - משלים.

2. יש לנו להראות שהפרש של שני פתרונות של המשוואה האי־הומוגנית פותר את המשוואה ההומוגנית($y=y_p+y_c\Leftrightarrow y-y_p=y_c$). אם

$$a_n\left(x\right)y_1^{(n)}+...+a_1\left(x\right)y_1'+a_0\left(x\right)y_1=b\left(x\right)$$

$$a_n\left(x\right)y_2^{(n)}+...+a_1\left(x\right)y_2'+a_0\left(x\right)y_2=b\left(x\right)$$

אזי

$$a_n\left(x\right)\left(y_1-y_2\right)^{(n)}+...+a_1\left(x\right)\left(y_1-y_2\right)'+a_0\left(x\right)\left(y_1-y_2\right)=b\left(x\right)$$

וגם הפוך, סכום של פתרון של ההומוג. ופתרון של האי־הומוג. הוא פתרון של האי־הומוג.

ראינו שמרחב הפתרונות הוא מרחב ווקטורי. מה המימד?

משפט

אם $a_n\left(x\right)=1$, מימד המרחב של פתרונות של המש. ההומוגנית היא n.(תמיד נניח ש$a_0\left(x\right),a_1\left(x\right),...a_n\left(x\right)$ הם רציפים).

הוכחה

ההוכחה מסתמכת על משפט הקיום והיחידות, שמתקיים במקרה ש$a_n\left(x\right)=1$

במקרה שn=2

נבנה בסיס y_1,y_2 של מרחב הפתרונות.
y_1 פתרון יחיד עם $y_1\left(x_0\right)=1,y_1'\left(x_0\right)=0$
y_1 פתרון יחיד עם $y_2\left(x_0\right)=0,y_2'\left(x_0\right)=1$
נסתכל על הפתרון $\alpha y_1\left(x\right)+\beta y_2\left(x\right)$.

$$y\left(x_0\right)=\alpha,y'\left(x_0\right)=\beta$$

ע"י קיום ויחידות אין עוד פתרון עם תנאי התחלה אלה, לכן מצאנו כל פתרון כצירוף לינארי של y_1,y_2 והם מהווים בסיס.