

תרגיל בית 3 במבנים אלגבריים 89214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1 (חימום). מצאו את כל האיברים מסדר סופי בחבורות הבאות: \mathbb{Z} , \mathbb{Q}^* , \mathbb{R}^* . הפעולות בחבורות האלו מופיעות בנספח "חבורות מוכרות" בחוברת מערכי התרגול.

שאלה 2. כתבו את לוח הכפל של החבורה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. הוכיחו שהיא ציקלית, ומצאו את כל היוצרים שלה.

שאלה 3. בתרגיל הבית הקודם הוכחתם שקבוצת המטריצות

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

היא תת-חבורה של $GL_3(\mathbb{Z}_2)$. מצאו את הסדר של H ואת הסדר של איברי H . האם H ציקלית?

שאלה 4. תהי קבוצה $S = \{a, b, c, d\}$ עם ארבעה איברים. השלימו את לוח הכפל הבא כך שתתקבל חבורה:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b		a		
c			a	
d				a

האם החבורה המתקבלת אבלית? האם היא ציקלית?

שאלה 5. תהי G חבורה אבלית. נסמן ב- T את אוסף האיברים מסדר סופי ב- G . הוכיחו כי $T \leq G$.

שאלה 6. תהי G חבורה ותהי $\emptyset \neq H \subseteq G$ תת-קבוצה לא ריקה.

א. הוכיחו שאם G חבורה סופית, אז כדי להוכיח ש- H היא תת-חבורה של G מספיק לבדוק סגירות לפעולה.

ב. הפריכו את הסעיף הקודם כאשר G אינסופית.

שאלה 7. תהי $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ חבורה אבלית סופית. יהי האיבר $b = a_1 a_2 \cdots a_n$.

א. הוכיחו $b^2 = e$.

ב. הוכיחו שאם אין ב- G איבר מסדר 2, אז $b = e$.

ג. בשפת התכנות C הניחו שהיצוג של הטיפוס unsigned char הוא של 8 סיביות (כלומר משתנה מטיפוס זה הוא בין 0 לבין 255 כולל). הסבירו מה תהיה התוצאה של קטע הקוד הבא בעזרת הסעיפים הקודמים:

```
1 unsigned char b=0;
2 unsigned int i=0;
3 for (i=0; i <= 255; i++) {
4     b += i;
5 }
6 printf("%d\n", b);
```

שאלה 8 (תכנות). נתבונן בחבורה $G = SL_2(\mathbb{Z}_p)$ עבור p ראשוני אי זוגי.

א. כתבו פונקציה המקבלת את הראשוני p ומחזירה את הסדר המקסימלי של איבר ב- G .

ב. הדפיסו את הערכים הראשוניים של הפונקציה שכתבתם. האם תוכלו לזהות חוקיות בסדר המקסימלי?

ג. (אתגר) מצאו והוכיחו תיאור עבור איבר מסדר מקסימלי (יש יותר מאיבר אחד כזה). נסו להוכיח שהאיבר שמצאתם הוא אכן מהסדר הנכון, אך אין צורך להוכיח שהסדר שלו מקסימלי ב- G .

(רמז: כדאי להיזכר באלגברה לינארית 2. הסתכלו על המטריצות מהסדר המקסימלי ולמצוא בהן חוקיות).