תרגיל בית 4 – חשבון אינפי 2 88-133 (תיכוניסטים) תשע"ו סמסטר ב

שאלות להגשה בתרגול

שאלה 1

פתור באמצעות נוסחת נסיגה את האינטגרל הבא:

$$\int x^n \sin x dx$$

פתרון שאלה 1

נסמן $I_n = \int x^n \sin x dx$. נחשב תחילה את I_1.

$$I_1 = \int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x$$

נחשב את $I_n = \int x^n \sin x dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$I_n = \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x dx = -x^n \cos x + n\left(x^{n-1}\sin x\right) - n(n-1)\int x^{n-2} \sin x dx =$$
$$= -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}$$

מכיוון שקיבלנו את I_n באמצעות I_{n-2} יש לחשב בנוסף ל I_1 גם את I_2.

$I_2 = \int x^2 \sin x dx$.

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

נסמן:
$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$
$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$I_2 = \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$$

נקבל את התשובה

$$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}$$
$$I_1 = -x\cos x + \sin x$$
$$I_2 = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$$

שאלה 2

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה. הוכח כי: $\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

פתרון שאלה 2

נציב $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$

$$\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))dt = \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt = \int_0^{\pi}\pi\cdot f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} t\cdot f(\sin t)dt$$

$$2\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \int_0^{\pi}\pi\cdot f(\sin x)dx \Rightarrow \int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

לחלק השני של השוויון מספיק להראות ש $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ ז"א מספיק להראות ש

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

נציב $dt = -dx \Leftarrow t = \pi - x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\pi-t))dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin t)dt.$$