פתרון 3 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות $u(x,y)$ הבאות, מצאו $v(x,y)$ כך שהפונקציה

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

תהיה גזירה בתחום הנתון. בטאו את f לפי z (יוצא משהו פשוט).

(א) $u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ בכל $\mathbb{C}$.
פתרון: נמצא את v לפי משוואות קושי רימן

$$u_x(x,y) = (e^x + xe^x)\cos y - e^x y \sin y = v_y$$

ולכן

$$v(x,y) = \int (e^x + xe^x)\cos y - e^x y \sin y \mathrm{d}y$$

נזכור ש

$$\int y \sin y \mathrm{d}y = -y\cos y + \int \cos y \mathrm{d}y = -y \cos y + \sin y$$

ולכן

$$v(x,y) = (e^x + xe^x)\sin y + e^x(y\cos y - \sin y) + C(x) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + C(x)$$

לפי משוואות קושי רימן השנייה,

$$v_x(x,y) = (e^x + xe^x)\sin y + e^x y \cos y + C'(x) = xe^x \sin y + e^x \sin y + e^x y \cos y = -u_y(x,y)$$

כלומר

$$C'(x) = 0$$

ולכן $C(x)$ קבוע. כלומר

$$v(x,y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + D \quad D \in \mathbb{R}$$

כמו כן קל לראות ש u, v שקיבלנו מקיימות את משוואות קושי רימן ולכן f שקיבלנו באמת גזירה. נשים לב ש

$$\begin{aligned} f(z) &= xe^x \cos y - ye^x \sin y + i(xe^x \sin y + e^x y \cos y + D) \\ &= xe^x(\cos y + i \sin y) - ye^x(\sin y - i \cos y) + iD \\ &= xe^x e^{iy} + iye^x(\cos y + i \sin y) + iD \\ &= xe^{x+iy} + iye^{x+iy} + iD = ze^z + iD \end{aligned}$$

(ב) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x$ ב $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
פתרון: כמו בסעיף הקודם

$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$$

כלומר

$$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

ולכן

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$$

לפי משוואת קושי רימן השניה

$$u_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y)$$

ולכן

$$C(y) = y + D \quad D \in \mathbb{R}$$

כלומר

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + y + D$$

וקל לוודא שמשוואות קושי רימן מתקיימות. כמו כן,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x}{x^2+y^2} + x + i(-\frac{y}{x^2+y^2} + y + D) \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} + x + iy + iD = \frac{\overline{z}}{|z|^2} + z + iD \\ &= z + \frac{1}{z} + iD \end{aligned}$$

2. תהיינה שתי פונקציות

$$f_1(x,y) = u(x,y) + iv_1(x,y)$$

$$f_2(x,y) = u(x,y) + iv_2(x,y)$$

המוגדרות וגזירות בתחום D. הוכיחו כי $v_1 - v_2$ הוא מספר קבוע.
פתרון: נסתכל על הפונקיצה $f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$. זאת פונקציה גזירה בתור מכפלת גזירות אבל יש לה רק חלק מדומה וכפי שראינו בתרגול זה אומר ש $f_1 - f_2$ קבועה (רואים מייד ממשוואות קושי רימן שכל הנגזרות החלקיות קבועות) ולכן $v_1 - v_2$ הוא מספר קבוע.

3. הוכיחו כי

(א) לכל z מתקיים $|e^z| \leq e^{|z|}$
פתרון: אם $z = x + iy$ אז

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| = e^x$$

$$e^{|z|} = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

היות ש $x \leq \sqrt{x^2+y^2}$ בוודאי ש

$$e^x \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(ב) מתקיים שוויון אם ורק אם z ממשי אי שלילי.
פתרון: אם z ממשי אי שלילי ברור שמתקיים שוויון. אם מתקיים שוויון אז

$$e^x = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

כלומר

$$x = \sqrt{x^2+y^2}$$

וזה וודאי מכריח $0 \leq x$ ו $y = 0$.

4. פתרו את המשוואה $e^{e^z} = 1$.
פתרון: לפי התכונות של e אנחנו יודעים בעצם ש

$$e^z = 2\pi ik \quad k \in \mathbb{Z}$$

אם $k = 0$ כמובן שאין לזה פתרון. עבור $k > 0$ נקבל

$$2\pi ik = e^{\ln(2\pi k)} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ולכן

$$z = \ln(2\pi k) + i\frac{\pi}{2} + 2\pi in \quad n \in \mathbb{Z}$$

ועבור $k < 0$ נקבל בדומה

$$z = \ln(2\pi|k|) - i\frac{\pi}{2} + 2\pi in \quad n \in \mathbb{Z}$$

אם נאחד את הפתרונות נקבל

$$z = \ln(2\pi|k|) + i\frac{\pi}{2} + \pi in \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$