

## בחינה בקורס אנליזה מודרנית

המרצים: שמעון ברוקס, ניר לב

משך הבחינה: 3 שעות.  
אין להשתמש בכל חומר עזר.  
יש לענות על ארבע מתוך חמש שאלות.  
משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. תהי  $f \in L^\infty[0, 1]$ . הראו כי לכל  $1 \leq p < \infty$  מתקיים כי  $f \in L^p[0, 1]$ , וכמו כן

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p[0,1]} = \|f\|_{L^\infty[0,1]}$$

2. תהי  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ונגדיר  $f_n(x) := f(x - \frac{1}{n})$ . הוכיחו כי הסידרה  $f_n$  מתכנסת ל- $f$  במרחב  $L^1(\mathbb{R})$  כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

3. יהי  $X$  מרחב מידה עם  $\mu(X) < \infty$  ותהי  $f \in L^1(X, \mu)$  כך ש- $f(x) \neq 0$  כמעט בכל מקום. הוכיחו כי לכל קבוצה מדידה  $E \subset X$  מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f|^{1/n} d\mu = \mu(E)$$

4. תהי  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  סידרת פונקציות מדידות לבג. נניח כי לכל  $\varepsilon > 0$  מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\} = 0$$

כאשר  $m$  היא מידת לבג. הוכיחו כי קיימת תת-סידרה  $f_{n_k}$  המתכנסת (נקודתית) לאפס כמעט בכל מקום.

5. תהי  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ e^x & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

הראו כי  $f$  היא פונקציה עם השתנות חסומה, ומצאו הצגה של  $f$  כסכום  $f = g + h$  כאשר  $g$  רציפה בהחלט, ו- $h$  היא פונקציה כך ש- $h'(x) = 0$  כמעט בכל מקום.

בהצלחה!