שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית מספר 1

תאריך הגשה: 28.03.2012

שאלה 1

נגדיר 3 מטריקות מעל $\mathbb{R}^2$.

המטריקה האוקלידית - $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

מטריקת הסכום - $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{2}|x_i-y_i|$

מטריקת מקסימום- $d_{\max}(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$

מצאו את המרחק בין $u=(2,5),v=(-1,1)$ עבור 3 המטריקות ותנו תאור גרפי של הכדורים $B_{d_{\max}}(u,1),B_{d_1}(u,1),B_d(u,1)$.

שאלה 2

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה a-adic באופן הבא: עבור $1\neq a\in\mathbb{N}$ מגדירים מטריקה על $\mathbb{Z}$-

$$d_a(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{a^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$$, עבור $k(x,y)=\max\{i:a^i\mid(x-y)\}$.

א. הוכיחו שהיא אכן מטריקה.

<u>רמז</u>: הראו כי $k(x,z)\geq\min\{k(x,y),k(y,z)\}$ והסיקו כי מתקיים

$$d(x,z)\leq\max\{d(x,y),d(y,z)\}$$

ב. תארו את הכדור $B_{d_5}\left(32,\frac{1}{25}\right)$ במרחב $(\mathbb{Z},d_5)$.

שאלה 3

יהיו $x_1,x_2\in(X,d)$ ו- $r_1,r_2>0$ ויהיו $B(x_1,r_1),B(x_2,r_2)$ כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק.

תהי $p\in B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$, ו - $r=\min\{r_1-d(p,x_1),r_2-d(p,x_2)\}$

הוכיחו ש- $B(p,r)\subseteq B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$.

שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

<u>שאלה 4</u>

<u>הגדרה</u>: תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי כלשהו (X,d). נאמר שהסדרה היא "קבועה לבסוף" אם קיים $x \in X$ כך שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n > n_0$ מתקיים $x_n = x$.

א. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי, כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

ב. הוכיחו כי סדרה מתכנסת במרחב מטרי **דיסקרטי** אם ורק אם היא קבועה לבסוף.

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:

(א) $d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$ לכל $n \ge 2$

(ב) $|\,d(x,z)-d(y,z)\,| \le d(x,y)$

<u>שאלה 6</u>

<u>הגדרה</u>: תהי $f: X \to Y$ פונקציה כלשהי. יהיו $A \subseteq X, B \subseteq Y$ תת קבוצות. אזי "התמונה של A" היא : $f(A)=\{f(x)\in Y : x \in A\}$; ו"התמונה ההפוכה של B" היא:
$f^{-1}(B)=\{x \in X : f(x) \in B\}$.

תהי $f: X \to Y$ הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $f\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq A$ לכל $A \subseteq Y$.

ב. אם f על אזי $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$. תנו דוגמא נגדית במקרה בו f לא על.

ג. $f^{-1}\left(f(B)\right) \supseteq B$ לכל $B \subseteq X$.

ד. אם f חח"ע אזי $f^{-1}\left(f(B)\right) = B$ לכל $B \subseteq X$. תנו דוגמא נגדית במקרה בו f אינה חח"ע.

שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

<u>שאלת בונוס</u>

הראו שאם $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי ו- d המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא** קיימים כדורים **שונים** $B(a_1,r_1),B(a_2,r_2)$ כאשר $r_1<r_2$ ו $B(a_1,r_1)\supset B(a_2,r_2)$.

בהצלחה!