(1)

אינטגרלים מוכללים

תהי $a\in\mathbb{R}$ קבועה! ונניח $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$ לכל b שגדול מ-a.

נגדיר $I(b)=\int_a^b f(x)dt$.

נסמן:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=\lim_{b\to\infty} I(b)$$

אם קיים גבול (והוא מספר ממשי) אז נאמר כי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס. אחרת נאמר שמתבדר!

(באופן דומה הגדרה — ש-b קבוע ו-$a\to-\infty$: $\int_{-\infty}^b f(x)dt$]

הגדרה: לכל נקודה $c\in\mathbb{R}$ קיים:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^\infty f(x)dx$$

ומספיק שאחד מאינטגרלים באגף ימין יתבדר כדי שהאינטגרל בצד שמאל יתבדר. (במילים אחרות $\int_{-\infty}^\infty f$ דורש פיצול הישר לשני אינטגרלים, ...!)

תשובה: עבור $a>0$, $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס $\iff \alpha>1$

דוגמא:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to\infty}(\arctan x)\Big|_0^R=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\arctan R=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to-\infty}\int_R^0\frac{dx}{1+x^2}=\dots=\lim_{R\to-\infty}(0-\arctan R)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

שימו לב! אם היינו מחשבים את הגבול

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} 2\arctan R = \pi$$

היינו מקבלים מה שצריך, אבל: אם נחשב את:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{2x}{1+x^2}dx + \lim_{L\to-\infty}\int_L^0 \frac{2x}{1+x^2}$$

$$=\lim_{R\to\infty}\ln(1+x^2)\Big|_0^R + \lim_{L\to-\infty}\ln(1+x^2)\Big|_L^0 = +\infty+\infty=+\infty$$

אבל אם נחשב: $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2x}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}\left(\ln(1+x^2)\right)\Big|_{-M}^{M}$

$$=\lim_{M\to\infty} 0 = 0$$

ואילו היינו מפרקים את R לשני התחומים!

(*) אגב, כנ"ל - סימון נקרא PV ≡ Principal Value, וזו אינטגרל אחר ממה שאנו עוסקים בו, שלפעמים יכול לתת את אותו ערך כמו זה בהגדרה אך לא תמיד!

האם נכון להסיק כי אם $f(x)$ אי-זוגית אז היא $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$? לא! (השאיפה $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R + \lim_{L\to-\infty}\int_L^0$

R,L בלתי תלויים [illegible]

בדוגמא: $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ מתבדר כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}xdx = \underbrace{\int_0^{\infty} xdx}_{\text{מתבדר}} + \underbrace{\int_{-\infty}^0 xdx}_{\text{מתבדר}}$$

לסיכום - אינטגרל מוכלל $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots dx$: אינטגרל על R של פונקציה f [illegible]

מתכנס אם $\int_{-\infty}$ מתכנס ו- $\int^{\infty}$ מתכנס, אחרת בנקודה [illegible]!

(2)

משפט – מבחן ההתכנסות הראשון (!) – $f,g \ge 0$. ל- $f,g \le 0$ נכון מינוס!)

$f,g \ge 0$ אינטגרביליות בכל קטע $[a,b]$ כך ש: -

$0 \le f(x) \le g(x)$ אז:

- אם $\int_a^\infty g(x)$ מתכנס $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.
- אם $\int_a^\infty f(x)$ מתבדר $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר!

מבחן ההתכנסות שני (גבולי).

$f,g \ge 0$ ב- $[a,\infty)$ וקיים גבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$

- אם $L=0$ $\Longrightarrow$ אם $\int_a^\infty g$ מתכנס אז $\int_a^\infty f$ מתכנס (או גם אם $\int_a^\infty f$ מתבדר $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g$ מתבדר)
- אם $L=\infty$ $\Longrightarrow$ אם $\int_a^\infty f$ מתכנס אז $\int_a^\infty g$ מתכנס (והפוך: אם $\int_a^\infty g$ מתבדר $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f$ מתבדר)
- אם $0<L<\infty$ $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty f$ ו- $\int_a^\infty g$ מתכנסים יחד או מתבדרים יחד!

עובדה: אם $f(x) \ge 0$ אז $\int_0^x f(t)dt$ פונקציה עולה!

לכן אם $\int_0^x f(t)dt$ חסומה (כלומר $\left|\int_0^x f(t)dt\right| \le M$ לכל x), אז,

נסיק כי $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס!

דוגמא: לבדוק התכנסות של $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4-x^2+1}$

פתרון: הבעיה רק ב- ∞ כי המכנה לא מתאפס כי $x^4-x^2+1 \ge a > 0$

לכל x (Δ שלילי!) וניתן להשתמש במבחן ההשוואה עם הפונקציה $\frac{1}{x^2}$

כי: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} < \infty$ כלומר:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^4-x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right) = 1$$

לכן מכיוון ש-

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1} = \underbrace{\int_0^1 \ldots}_{\text{מוגדר.}} + \int_1^\infty \ldots$$

נוכל ממבחן ההשוואה ש $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$ ו- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx < \infty$

מתכנסים/מתבדרים יחדו ובמקרה זה - מתכנסים!

תרגיל: (ארוך! - אבל רק חלק מהתחומים לפתור - מבחינת זמן!)

$\int_2^\infty \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}dx$. לאילו ערכי α ו- β האינטגרל מתכנס?

פיתרון:

נזכר כי $\int_2^\infty \frac{1}{x^\beta}dx$ מתכנס עבור $\beta>1$.

מקרה 1: $\beta>1$ וגם $\alpha\le 0$ נקבל:

אם $x>e$: $\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} \le \frac{1}{x^\beta}$

ולפי מבחן ההשוואה נקבל התכנסות (כי $0\le \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} \le \frac{1}{x^\beta}$).

מקרה 2: $\beta>1$ ו- $\alpha>0$:

אם ננסה מבחן מנה(גבולי):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}\right)}{\left(\frac{1}{x^\beta}\right)} = \lim_{x\to\infty} \ln^\alpha x = \infty$$

לא עזר לנו.

ננסה אחרת:

עובדה: $\frac{\ln x}{x^L} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ לכל $L>0$!

(3)

<u>הוכחה</u> (המשך)

בקלות נראה כי:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^L} \underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\overset{L}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{Lx^{L-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{Lx^L}=0$$

∎

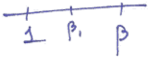
כעת, נשים לב כי

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

עבור $\beta>1$, $\alpha>0$

כי יש לנו כאן $L=\frac{\beta}{\alpha}>0$ ושימוש בטענה הקודמת!

נרצה להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם פונקציה שמאפשר השוואה "עדינה" יותר: אבל $\beta>1$! ו- $\alpha>0$



נגדיר $\beta_1=\frac{1+\beta}{2}$. אזי: $\boxed{\beta-\beta_1=\beta_1-1>0}$

$$\frac{\left(\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}\right)}{\left(\frac{1}{x^{\beta_1}}\right)} = \frac{\ln^\alpha x}{x^{\beta-\beta_1}} = \frac{\ln^\alpha x}{x^{\beta_1-1}} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta_1-1}{\alpha}}}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

כי $0<\frac{\beta_1-1}{\alpha}$!

לכן ממבחן ההשוואה: $\int_2^\infty \frac{1}{x^{\beta_1}}\,dx$ מתכנס ולכן $\int_2^\infty \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}\,dx$ מתכנס!

עד כה הוכחנו שעבור $\beta>1$ יש התכנסות!

מה עבור $\beta\le 1$

(4)

אם $\beta<1$:

- אם $\alpha\le 0$ וגם $\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} > \frac{1}{x}$ עבור $x>e$ ולכן התבדרות מאפיון ההשוואה!

- אם $\alpha<0$: נבדוק כעת את התכנסות של: $\int_2^\infty \frac{1}{x^\beta(\ln x)^\alpha}dx$

כאשר $\alpha>0$, $\beta<1$

אם נשווה את זה ל- $\frac{1}{x}$:

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left[\frac{1}{x^\beta(\ln x)^\alpha}\right]} = \frac{(\ln x)^\alpha}{x^{1-\beta}} = \left(\frac{\ln x}{\left(x^{\frac{1-\beta}{\alpha}}\right)}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

על סמך גדר מאפיון, ולכן קיים מספר שקיים M כך ש- $x>M$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x^\beta(\ln x)^\alpha} \Leftarrow \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x^\beta(\ln x)^\alpha}\right)} < 1$$

חשוב! אפיון זה מראה שקיים

ולכן $\infty = \int_M^\infty \frac{1}{x}dx \le \int_M^\infty \frac{dx}{x^\beta(\ln x)^\alpha}$ כלומר האינטגרל שלנו מתבדר!

$$\boxed{\text{כלומר קיבלנו } \int_2^\infty \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}dx \text{ מתבדר עבור } \beta<1}$$

נותר לבדוק עבור $\beta=1$:

$$\int_2^\infty \frac{\ln^\alpha x}{x}dx = \underset{\substack{t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx}}{=} \int_{\ln 2}^\infty t^\alpha dt \underset{\alpha\ne-1}{=} \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\Bigg|_{\ln 2}^\infty = \begin{cases}\infty; & \alpha>-1\\ 0-\frac{(\ln 2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}; & \alpha<-1\end{cases}$$

$\alpha\ne-1$

$\alpha=-1$: $\int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t}dt = (\ln t)\Big|_{\ln 2}^\infty = \infty$

סיכום:

ולכן $\int_2^\infty \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}dx$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\beta>1$ או ($\beta=1$ וגם $\alpha<-1$)!

הגדרה:

אינטגרל לא אמיתי $\int_a^\infty f(x)dx$ **מתכנס בהחלט** אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, ומתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אבל $\int_a^\infty |f(x)|dx$ **לא** מתכנס.

משפט אינטגרל מתכנס בהחלט — מתכנס!

שימוש במשפט **חשוב**:

קריטריון קושי: תהי $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ ($a<b$). **אז** האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $B>a$ כך שלכל $b_1>b_2>B$ מתקיים: $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

(מזכיר לנו קריטריון קושי להתכנסות של פונקציות ב- ∞..)

משפט דיריכלה: (עבור פונקציות שיכולות להחליף סימן)

תהיינה f,g רציפות רציפות ב- $[a,\infty)$. כך ש-:

(1) f מונוטונית יורדת לאפס: $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

(2) $f'(x)$ רציפה ב- $[a,\infty)$.

(3) הפונקציה $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ חסומה ב- $[a,\infty)$ (כלומר קיים $M>0$ כך ש $\left|\int_a^x g(t)dt\right|\le M$ לכל $x\ge a$.

(5)

אז: $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ מתכנס!

דוגמה: (נסה בעזרת דיריכלה לבדוק): $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\ln x}\,dx$

נגדיר $f(x)=\frac{1}{\ln x}$. אז $f(x)$ יורדת לאפס כש- $x\to\infty$ ✓

- f' רציפה ב- $[2,\infty)$: $f'(x)=-\frac{1}{x(\ln x)^2}$. ✓

- עבור $g(x)=\sin x$:

$$G(x)=\int_2^x \sin t\,dt=(-\cos t)\Big|_2^x=\cos 2-\cos x$$

ולכן $x\ge 2$ קיים $|G(x)|\le 17$. ✓

$\Downarrow$

לכן לפי דיריכלה: $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\ln x}\,dx$ מתכנס!

שאלה נוספת: האם האינטגרל שלנו $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\ln x}\,dx$ מתכנס בהחלט?

פיתרון:

נשים לב כי קיים $\left|\frac{\sin x}{\ln x}\right|\ge \frac{\sin^2 x}{\ln x}$.

נראה כי $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\ln x}$ מתבדר!:

נציג זאת כך: $\frac{\sin^2 x}{\ln x}=\frac{1}{2\ln x}-\frac{\cos 2x}{2\ln x}$

ומכאן:

$$\frac{1}{2\ln x}=\frac{\sin^2 x}{\ln x}+\frac{\cos 2x}{2\ln x}$$

ניתן להראות בעזרת דיריכלה כי $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{2\ln x}$ מתכנס! (בדומה ל- $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\ln x}$)

לכן אם בשלילה $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\ln x}$ מתכנס נקבל כי $\int_2^\infty \frac{1}{2\ln x}$ מתכנס! (כסכום אינטגרלים מתכנסים)

אבל $\int_2^\infty \frac{1}{2\ln x}$ מתבדר! (כאשר כי $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$) ולכן עבור

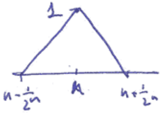
$x>M$, M גדול מספיק, $\frac{\ln x}{x}<1 \iff \frac{1}{x} < \frac{1}{\ln x} \Rightarrow \left(\int_M^\infty \frac{1}{2\ln x} > \int_M^\infty \frac{1}{2x} = \infty\right)$

לכן נסיק כי $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\ln x}\,dx$ מתבדר ולכן $\Rightarrow \int_2^\infty \left|\frac{\sin x}{\ln x}\right| dx$ מתבדר!

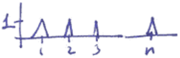
כלומר אין התכנסות בהחלט!

שאלה ידוע כי $f(x)\geq 0$ וכי $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x) < \infty$ (אינטגרל מתכנס).

האם נובע כי $\lim f(x)=0$? לא!



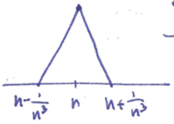
לא: $f(x)=$



$$\int_0^x f(t)\,dt \le \int_0^{[x+1]+\frac{1}{[x+1]}} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{[x+1]} \frac{1}{2^n} < 1$$

– האם נובע כי $f(x)$ חסומה?

לא – ניקח משולשים בגובה n



שטח כל משולש:

$$\frac{1}{2}\, n\cdot \frac{2}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$$\int_2^\infty f(x) = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

אינטגרל לא אמיתי מסוג II (פונקציות לא חסומות)

נתון קטע $[a,b]$ ו- $c_1,\dots,c_n$ נקודות בו.
נאמר שהן נקודות מיוחדות אם $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע חלקי $[\alpha,\beta]$ של $[a,b]$ שלא מכיל אף אחת מ- c_i, ואינה חסומה בכל סביבה של כל אחת מ- c_i.

הגדרה:
תהי f מוגדרת ב- $[a,b]$ ו- a נק' מיוחדת של f בקטע.
אז, לכל $\varepsilon>0$ נגדיר אינטגרל: $I(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.
אם הגבול $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ קיים וסופי, נסמן אותו ב- $\int_a^b f(x)dx$.
נגיד שהאינטגרל מתכנס. אחרת נגיד מתבדר!
כנ"ל לנקודה מיוחדת b.

- אם $c\in(a,b)$, ו- f אינטגרבילית בכל קטע מהצורה: $[c+\varepsilon,b]$, $[a,c-\varepsilon]$
ו- f לא חסומה בסביבת c. אז אם קיימים הגבולות $I_1=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$; $I_2=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, אז נאמר שהאינטגרל של f ב- $[a,b]$ מתכנס וערכו $I_1+I_2=\int_a^b f$

(*) מספיק שאחד מתוך I_1,I_2 מתבדר - כדי שהאינטגרל מתבדר!

חשוב:

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \text{ מתכנס } \iff \alpha<1}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \text{ מתכנס } \iff \alpha<1$$

דוגמא:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x} \underset{\downarrow}{=} \int_{\ln\varepsilon}^0 t\,dt$$

$$t=\ln x$$
$$dt=\frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{\ln\varepsilon}^{0} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[0-\frac{(\ln\varepsilon)^2}{2}\right] = -\infty$$

אינטגרל מתבדר!

ולכן ניתן להמיר קטע חסום לקטע אינסופי (וההפך).

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \underset{\downarrow}{=} -\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \varphi(y)\,dy$$

$x=a+\frac{1}{y}$, $dx=-\frac{1}{y^2}dy$ $\qquad \varphi(y)=\frac{f(a+\frac{1}{y})}{y^2}$

נשים לב כי:

משפטים לבדיקת התכנסות:

משפט (קריטריון קושי).

אם a נקודה יחודה ב-$[a,b]$ שבסביבתה f לא חסומה.

אז $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\delta_1,\delta_2<\delta$ מתקיים

$$\left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

— ובדומה לנקודה b!

— **השוואה:** אם a נק' מיוחדת יחודה של f ו-g ב-$[a,b]$

ולכל x בקטע $0\le f(x)\le g(x)$ אז

— אם $\int_a^b g(x)$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^b f$ מתכנס

— אם $\int_a^b f(x)$ מתבדר $\Leftarrow$ $\int_a^b g$ מתבדר!

— וכן גם המבחן הגבולי. $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=L$ ..

— אינטגרל מתכנס בהחלט $\leftarrow$ מתכנס!

(7)

דוגמא: נבדוק את:

$\cancel{\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}}$ $\quad \int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

נבדוק בנפרד: $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ (I) , $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ (II)

(I): נשווה עם $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$:

$$\frac{\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

! - $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ מתבדר, לכן (I) מתבדר וגם האינטגרל מתבדר (לא צריך לבדוק (II)).

תרגיל: $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

יש 2 נק' בעייתיות 0 ו- 1:

$$I = \int_0^{\frac12} \_\_\_ + \int_{\frac12}^1 \_\_\_$$

אינטגרל מתכנס אם שני אינטגרלים מתכנסים.

נבדוק $\int_0^{\frac12} \_\_\_ dx$: $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \le 0 \\ g(x) = \ln x \end{cases}$ ⇐ f,g אינטגרביליות בכל קטע $[t,\frac12]$, $0<t<\frac12$

וגם x קטן כלפ f,g לא חיוביות. לפי קריטריון ההשוואה:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

לכן אינטגרלים $\int_0^{\frac12} f$ ו- $\int_0^{\frac12} g$ מתכנסים/מתבדרים יחד! ⇐

$$\int_t^{\frac12} g(x)dx = \int_t^{\frac12}\ln x\, dx = (x\ln x - x)\Big|_t^{\frac12} = \frac12\ln\frac12 - \frac12 - (t\ln t - t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac12\ln\frac12 - \frac12$$

לכן מתכנס! ⇐ $\int_0^{\frac12} f(x)dx$ מתכנס!

ג) ? - $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, בעיה היא ב- $x=1$.

ש

$$\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

נשאל אותה שאלה עם זה של $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}dx$.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} \underset{\downarrow}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1-y^2)}{y} = \lim_{y\to 0^+}\left[\overbrace{\frac{\ln(1-y)}{y}}^{\text{קיים:}} + \frac{\ln(1+y)}{y}\right]$$

$y=\sqrt{1-x}$

$\Updownarrow$

$y^2=1-x$

$\Updownarrow$

$x=1-y^2$

$$= -1+1=0$$

ולכן נגדיר: $g(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} ; & [\frac{1}{2},1) \\ 0 ; & 1\end{cases}$ וקיבלנו g רציפה ב- $[\frac{1}{2},1]$

לכן אינטגרבילית וקיים:

$$\frac{\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

ולכן ממבחן ההשוואה הגבולי שני מתכנס: $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$