חשבון אינפי 2
תרגיל 3- פתרון

<u>שאלה 1</u>: השתמשו באינטגרלים מסוימים מתאימים על מנת לחשב את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

פתרון: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}$$

שימו לב הוספנו מחובר $\sin\frac{\pi n}{n}=\sin\pi=0$.

נגדיר $f(x)=\sin x$ בקטע $[0,\pi]$. $f(x)$ רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית בו.

$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k^*\right)\Delta x$ כאשר $\Delta x=\frac{\pi}{n},\ x_k^*=\frac{\pi k}{n}\in\left[x_{k-1},x_k\right],\ x_k=\frac{\pi k}{n},\ 0\le k\le n$

ולכן לפי הגדרה של האינטגרל המסוים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)=2$$

ב. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

פונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית בו ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$$

<u>שאלה 2</u>: הוכיחו את אי השוויונות:

א. $$0<\int_0^1\frac{x^7dx}{\sqrt[3]{1+x^8}}<\frac{1}{8}$$

הוכחה: $x^7<\frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}}<0$ לכל $0<x\le 1$ ולכן $\frac{1}{8}=\frac{x^8}{8}\Big|_0^1=\int_0^1 x^7dx<\int_0^1\frac{x^7dx}{\sqrt[3]{1+x^8}}<0$. מש"ל

ב. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx < \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$ כאשר $R>0$. רמז: הוכיחו כי $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

הוכחה:

1. נראה ש- $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

נגדיר $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$. זוהי פונקציה רציפה בקטע סגור $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ולכן מקבלת ערך מינימלי ומקסימלי בקטע . נמצא את הערך המינימלי.

$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}=0$ ולכן $x=\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$ נקודה חשודה לקיצון בקטע הנ"ל.

$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f\left(\arccos\frac{2}{\pi}\right)\approx 0.21>0$ ולכן הערך המינימלי של הפונקציה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הוא 0 ולכן $f(x)>0$ לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ כלומר $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ כדרוש.

2. נוכיח, כי $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx < \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$ כאשר $R>0$.

$f(x)=e^{-R\sin x}$ פונקציה יורדת בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ והוכחנו ש- $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ לכן $e^{-R\sin x}<e^{-\frac{2}{\pi}Rx}$ בקטע הנ"ל ולכן

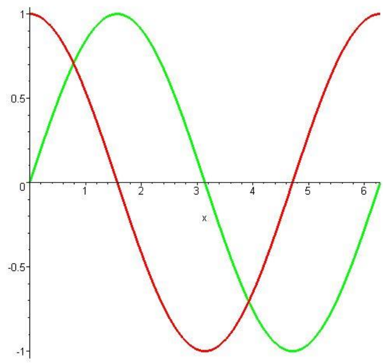
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}Rx}dx = -\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2}{\pi}Rx}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$$ כדרוש.

שאלה 3: מצאו את שטח התחום הכלוא בין העקומות :

א. $y=\sin x\ ,\ \ y=\cos x\ ,\ \ x=0\ ,\ \ x=2\pi$

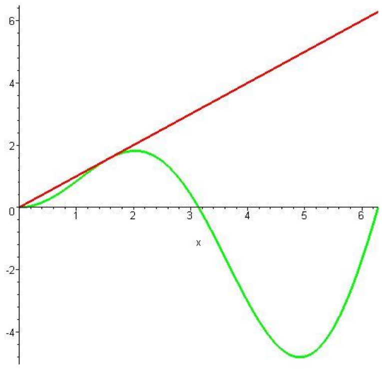
פתרון:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)dx=4\sqrt{2}$$



ב. $y = x\sin x$ ל- $y = x$, כאשר $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

פתרון:



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)dx$$

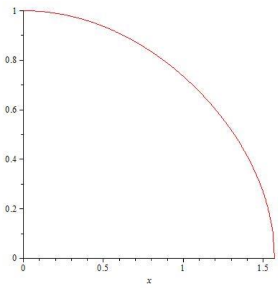
$$\begin{Bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = 1-\sin x & v = x+\cos x \end{Bmatrix}$$

$$= x(x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)dx =$$

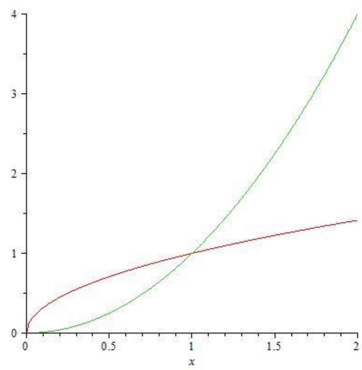
$$= \frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{x^2}{2} + \sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

שאלה 4:

א. מצאו את נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב של התחום החסום ע"י $y = \sqrt{\cos x}, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$ סביב ציר ה - x.



פתרון: $V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\cos x}\right)^2 dx = \pi \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



ב. מצאו את נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב של התחום החסום ע"י $y = x^2, x = y^2$ סביב ציר ה - y.

פתרון: נמצא את נקודות החיתוך של שתי העקומות

$$y = x^2, x = y^2$$

$$x^4 = x$$

$$x\left(x^3 - 1\right) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$V = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy - \pi\int_0^1 \left(y^2\right)^2 dy = \frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^1 - \frac{\pi}{5}y^5\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$

<u>שאלה 5</u>: חשבו את אורך הקשת של העקומות הבאות:

א. $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ מ- $x=a$ ל- $x=b$, $b>a$

פתרון:

$$y'=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\frac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}}dx=\int_a^b\sqrt{\frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{\left(e^{2x}-1\right)^2}}dx=\int_a^b\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx$$

$$=\int_a^b\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx+\int_a^b\frac{1}{e^{2x}-1}dx$$

נציב

$$e^{2x}-1=t \qquad 2e^{2x}dx=dt \qquad e^{2x}dx=\frac{1}{2}dt$$

או

$$e^{2x}-1=t \qquad 2e^{2x}dx=dt \qquad dx=\frac{1}{2\left(t+1\right)}dt$$

נקבל

$$\int_a^b\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx+\int_a^b\frac{1}{e^{2x}-1}dx=\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t}dt+\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t\left(t+1\right)}dt=\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t}dt+\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t}dt-\frac{1}{2}\int_{e^{2a}-1}^{e^{2b}-1}\frac{1}{t+1}dt=\ln\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{2b}}{e^{2a}}\right|=\ln\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right|-\ln\left|\frac{e^b}{e^a}\right|=\ln\left|\frac{e^a\left(e^{2b}-1\right)}{e^b\left(e^{2a}-1\right)}\right|$$

ב. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ מ- $y=1$ ל- $y=2$.

פתרון:

$$x'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}$$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}\right)^2}dy=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}dy=\int_1^2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}\ln\left|y\right|\Big|_1^2=1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$