פיתרון לתרגיל 2

תשובה 1:

א) אין זה אפילו מבנה אלגברי: אין אסוציאטיביות: $4 - (3 - 2) \neq (4 - 3) - 2$.
ב) חבורה (יש הופכי כיוון שהדטרמיננטה גדולה מ-0, אך יש צורך לבדוק שהוא אכן מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$).
ג) הקבוצה $H = \{(x,y)\in Z\times Z \mid x^2-3y^2=1\}$ עם הפעולה $(x,y)\bullet(z,w) = (xz+3yw, xw+yz)$ היא חבורה.

הוכחה:
(1) נוכיח סגירות: יהיו $(x,y),(z,w)\in H$, אזי $(x,y)\bullet(z,w)=(xz+3yw, xw+yz)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. כעת:

$$(xz+3yw)^2-3(xw+yz)^2 = x^2z^2+6xyzw+9y^2w^2-3x^2w^2-6xyzw-3y^2z^2 =$$
$$= x^2z^2-3x^2w^2-3y^2z^2+9y^2w^2=(x^2-3y^2)(z^2-3w^2)=1\cdot 1=1$$

ולכן $(x,y)\bullet(z,w)\in H$.
(2) נוכיח אסוציאטיביות: יהיו $(a,b),(r,s),(x,y)\in H$, אזי:

$$((a,b)\bullet(r,s))\bullet(x,y)=(ar+3bs, as+br)\bullet(x,y)=$$
$$=(arx+3bsx+3asy+3bry, ary+3bsy+asx+brx)=$$
$$=(arx+3asy+3bry+3bsx, ary+asx+brx+3bsy)=$$
$$=(a,b)\bullet(rx+3sy, ry+sx)=(a,b)\bullet((r,s)\bullet(x,y))$$

ולכן הפעולה $\bullet$ אסוציאטיבית.
(3) לא חייבים, אבל נראה כי הפעולה $\bullet$ חילופית:

$$(x,y)\bullet(z,w)=(xz+3yw, xw+yz)=(zx+3wy, wx+zy)=(z,w)\bullet(x,y)$$

(4) קיום יחידה: האיבר $(1,0)$ שייך ל- H כי $1^2-3\cdot 0^2=1$. בנוסף, לכל $(x,y)\in H$ מתקיים:

$$(1,0)\bullet(x,y)=(1\cdot x+3\cdot 0\cdot y, 1\cdot y+0\cdot x)=(x,y)$$

ולכן $(1,0)$ יחידה של H. (לא צריך לבדוק ש- $(x,y)\bullet(1,0)=(x,y)$ כי הוכחנו אבליות.)
(5) יהי $(x,y)\in H$. נראה כי קיים ל- (x,y) הופכי ב- H. מהגדרת H ברור כי גם $(x,-y)\in H$ ומתקיים:

$$(x,y)\bullet(x,-y)=(x^2-3y^2, -xy+yx)=(1,0)$$

לכן, $(x,-y)$ הופכי של (x,y) (לא צריך לבדוק $(x,-y)\bullet(x,y)=(1,0)$ כי הוכחנו אבליות) ולכל איבר ב- H קיים הופכי.

ד) אין זה אפילו מבנה אלגברי: אין סגירות: $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})=2\notin R\backslash Q$.

<u>תשובה 2:</u>

נבדוק כל אחת מהתכונות בצורה רוחבית לגבי כל אחת מהקבוצות $Q, Z/5Z, Z/7Z$:

כלומר $B \in \left\{Q, Z/5Z, Z/7Z\right\}$ ו- $A = B^*$

נבדוק את אקסיומות החבורה:

<u>סגירות</u>

$$(s+tx)(u+vx) = (su+2tv)+(sv+tu)x$$

מהסגירות של $Q, Z/5Z, Z/7Z$ עבור כפל וחיבור, נובע שהסגירות מתקיימת בכפל בתוך הקבוצות B ($(su+2tv)\in B, (sv+tu)\in B$), אך אנחנו לא יודעים אם לא מתקבל איבר האפס.

נבדוק מה קורה כאשר $(su+2tv)=(sv+tu)=0$ (נזכור שקבוצות הבסיס עם פעולת הכפל הן חבורות קומוטטיביות, ולכן לכל איבר יש הופכי, וניתן להחליף סדר במכפלות)

$$\begin{matrix} sv+tu=0 & & su+2vt=0 & & (-2)v^2u^{-1}=(-1)u \\ sv=(-1)tu & \Leftarrow & su=(-2)vt \ (\mathrm{u}\neq 0) & \Leftarrow & (-2)v^2=(-1)u^2 \\ (-2)vtu^{-1}v=(-1)tu & & s=(-2)vtu^{-1} & & \end{matrix}$$

(כאשר $u=0$ אז $v\neq 0$ אחרת האיבר הראשון היה $0\notin A$, לכן כדי ששני השיוונות יתקיימו $s=0,t=0$ וזה גם לא יכול להתקיים אחרת האיבר השני היה $0\notin A$)

מכאן קיבלנו את השיוויון $(-2)v^2=(-1)u^2$.

ב-Q השיויון הזה שקול לשאלה האם-$\sqrt{2}$ הוא רציונלי או אי-רציונלי. מכיוון שאנחנו יודעים ש- $\sqrt{2}$ הוא אי-רציונלי השיוון לא מתקיים לאף u,v, ולכן לא נוכל לקבל את איבר האפס, והפעולה סגורה ב-B.

ב- $Z/5Z$ השיויון שקול ל $3v^2=4u^2$.

הריבועים האפשריים (x^2) ב- $Z/5Z$ הם 1 או 4 (אפשר לבדוק את כל ארבעת האפשרויות). הצבה של ארבעת האפשרויות של זוגות u^2,v^2 (נציב $u^2=1,v^2=1$, $u^2=1,v^2=4$ וכן הלאה) מראה שאין פתרון ב- $Z/5Z$ ולכן לא נוכל לקבל את איבר האפס, והפעולה סגורה ב-B.

ב- $Z/5Z$ השיויון שקול ל $5v^2=6u^2$.

ב- $Z/7Z$ יש פתרון כאשר $u=3,v=1$. ואכן $(3+x)(3-x)=(9-2)+(3-3)x=0$

לכן הקבוצה A עבור $Z/7Z$ אינה סגורה ולכן אינה חבורה

<u>אסויצאטיביות:</u>

נבדוק ש- $(ab)c = a(bc)$ $\forall a,b,c \in A$

$$[(s_1+t_1x)(s_2+t_2x)](s_3+t_3x) = \left[\left(s_1s_2+2t_1t_2\right)+(s_1t_2+t_1s_2)x\right](s_3+t_3x) =$$
$$= \left(s_1s_2+2t_1t_2\right)s_3 + 2(s_1t_2+t_1s_2)t_3 + \left(\left(s_1s_2+2t_1t_2\right)t_3 + (s_1t_2+t_1s_2)s_3\right)x =$$
$$= s_1s_2s_3 + 2t_1t_2s_3 + 2s_1t_2t_3 + 2t_1s_2t_3 + s_1s_2t_3 + 2t_1t_2t_3 + s_1t_2s_3 + t_1s_2s_3$$
$$(s_1+t_1x)[(s_2+t_2x)(s_3+t_3x)] = (s_1+t_1x)\left[\left(s_2s_3+2t_2t_3\right)+\left(s_2t_3+t_2s_3\right)x\right] =$$
$$s_1\left(s_2s_3+2t_2t_3\right)+2t_1\left(s_2t_3+t_2s_3\right)+\left(s_1\left(s_2t_3+t_2s_3\right)+t_1\left(s_2s_3+2t_2t_3\right)\right)$$
$$s_1s_2s_3 + 2s_1t_2t_3 + 2t_1s_2t_3 + 2t_1t_2s_3 + \left(s_1s_2t_3 + s_1t_2s_3 + t_1s_2s_3 + 2t_1t_2t_3\right)x$$

מכיון שהחבורות המקוריות הן קומוטטיביות מכפלות ה- s_i, t_j מתחלפות והביטויים שקיבלנו זהים.

$$[(s_1+t_1x)(s_2+t_2x)](s_3+t_3x) = (s_1+t_1x)[(s_2+t_2x)(s_3+t_3x)]$$

<u>*איבר יחידה:*</u>

איבר היחידה הוא $1+0\cdot x$:

$(s+tx)(1+0\cdot x) = s+tx$, $(1+0\cdot x)(s+tx) = s+tx$.

<u>איבר הופכי:</u>

$\frac{1}{s+tx} = \frac{1}{s+tx}\cdot\frac{s-tx}{s-tx} = \frac{s-tx}{s^2-2t^2} = (s-tx)(s^2-2t^2)^{-1}$, האיבר שאותו "הפכנו" נמצא בחבורה המקורית לכן קיים לו הופכי. ולכן לכל איבר ב- A קיים איבר הופכי, ומצאנו את צורתו.

(ב- $Z/5Z$ ניתן לכתוב את האיבר ההופכי כ- $\frac{1}{s+tx} = (s+4tx)(s^2+3t^2)^{-1}$)

לכן עבור $Q, Z/5Z$ הקבוצות שהגדרנו עם פעולת הכפל הינן חבורות. (בגלל הקומוטטיביות של החבורות המקוריות גם החבורות החדשות הינן קומוטטיביות).

<u>תשובה 3 :</u>

א) בדיקת האקסיומות (בקשר לקיום הופכי: למרות שידוע שיש הופכי ב- $GL_3(R)$,
(הדטרמיננטה ≠ 0) צריך עדיין להראות שהוא איבר ב- G). החבורה אינה אבלית. שימו לב: כדי להראות סגירות ו/או קומוטטיביות – יש צורך לבדוק תכונות אלה על איברים מהחבורה עצמה – ולא להראות, למשל, שכפל של איבר מ- G באיבר אחר מ- $GL_3(R)$ אינו קומוטטיבי.

ב) בדיקת האקסיומות.

תשובה 4 :

אני דובר אמת! מספיק להוכיח שכל איבר במונואיד הפיך.

יהי $a \in M$, איבר זה הפיך מימין לכן קיים $b_1 \in M$ כך ש $ab_1 = 1$, מאותה סיבה קיים $b_2 \in M$ כך ש $b_1 b_2 = 1$ מכאן $a = a \cdot 1 = a \cdot (b_1 \cdot b_2) = (a \cdot b_1) \cdot b_2 = 1 \cdot b_2 = b_2$ ומכאן ש $ab_1 = b_1 b_2 = b_1 a = 1$ ז"א ש b_1 ההופכי של a.

תשובה 5 :

א) סגירות ואסוצ' – קל. איבר יחידה: העתקת הזהות היא איבר היחידה.

ב) שימו לב ש- DU = id אבל UD ≠ id. לכן D הפיך מימין אך לא משמאל (אם היה לו הפיך משמאל אז D∈U(Hom(V)) וכזכור, U(Hom(V)) היא חבורת האיברים ההפיכים של Hom(V). אבל אז ההופכי השמאלי של D היה שווה להופכי הימני של D (כי בחבורה מתקיים יחידות ההופכי) ולכן ההופכי השמאלי היה חייב להיות שווה ל-U, אך אין זה כך). באותו אופן, U הפיך משמאל אך לא מימין.

תשובה 6 :

א) זוהי בדיקה מפורשת של 4 התכונות (סגירות, אסוציאטיביות, איבר יחידה, אבליות). איבר היחידה שייך ל- G^k, כי כל חזקה של איבר היחידה היא הוא עצמו. סגירות: נניח ש- $a,b \in G^k$. ז"א הם מהצורה $a = c^k$, $b = d^k$. לכן $a \cdot b = c^k \cdot d^k = (cd)^k \in G^k$. השיוויון האחרון אפשרי כי G אבלית. אסוציאטיביות – כי G^k מוכלת ב- G, ולכן יורשת את האסוציאטיביות שלה. אבליות – נובעת מההכלה ב- G.

ב) הסגירות אינה מתקיימת.

ג) נשאר לבדוק סגירות להופכי (סגירות לכפל, אסוצ' ויחידה בדקנו ב-א)). יהי $a \in G^k$. ז"א – $a = c^k$, כש- $c \in G$. אזי $a^{-1} = (c^k)^{-1} = (c^{-1})^k \in G^k$.

תשובה 7 :

א) $(A,\bullet)$ הוא מונואיד ולא חבורה.

סגירות מתקיימת בגלל הגדרת קבוצת החזקה.

אסוציאטיביות מתקיימת בגלל פעולת החיתוך.

איבר היחידה הוא הקבוצה S, שהרי: $\forall a \in A, a \cap S = a$ (כי $P(S)$ זה אוסף תתי הקבוצות של S).

לכן קיבלנו מונואיד.

קיום איבר הופכי- לא מתקיים, שהרי לא לכל $a \in A$ קיים $b \in A$ כך ש: $a \cap b = S$. לדוגמא: $\forall a \in A, a \cap \varnothing = \varnothing$.

לכן לא קיבלנו חבורה.

ב) המונואיד $(P(\mathbb{N}),\bigcap)$.

תשובה 8 :

הפעולה המעגלית סגורה ב- $\mathbb{N}$, כי $\forall a,b\in\mathbb{N}, a+b+ab\in\mathbb{N}$.

פעולות החיבור והכפל קומוטטיביות ב- $\mathbb{N}$, ולכן:

$$a\circ b=a+b+ab=b+a+ba=b\circ a$$

כלומר הפעולה המעגלית היא קומוטטיבית.

כעת נוכיח את האסוציאטיביות:

$$(a\circ b)\circ c=(a+b+ab)\circ c=(a+b+ab)+c+(a+b+ab)c=$$
$$=a+b+c+ab+ac+bc+abc=$$
$$=a+b+c+bc+ab+ac+abc=$$
$$=a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)=$$
$$=a+b\circ c+a(b\circ c)=$$
$$=a\circ(b\circ c)$$

כלומר קיבלנו: $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$.

סה"כ קיבלנו ש: $(\mathbb{N},\circ)$ היא אגודה אבלית.