פיתרון בוחן בבדידה 2 למהנדסים, 83-118, סמסטר ב, תשע"ח

י"ח אייר, 3/5/2018

מרצה: ד"ר קונסטנטין גולובב

מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: כל השאלות הינן חובה. סך הנקודות הוא 108, אך לא ניתן לצבור יותר מ-100 נקודות בסה"כ.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- אין צורך לחשב במדוייק דברים כמו $\frac{2549!}{236!}$...

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. א. בפקולטה להנדסה בשנה א ישנם 123 סטודנטים. בכמה דרכים ניתן לבחור סטודנטים שיהיו אחראים על 15 תפקידים שונים, כך שאין סטודנט שאחראי על יותר מתפקיד אחד? (17 נקודות)

ב. אוהב ירקות רוצה לקנות 18 ירקות. לפניו חמישה סלים שבכל אחד כמות אדירה (אינסופית לצורך התרגיל) של ירקות מהסוגים הבאים: סל מלפפונים, סל עגבניות, סל גזרים, סל גמבות צהובות וסל כרובים לבנים. כמה אפשרויות יש לו לבחירת 18 הירקות שהוא רוצה, אם ידוע שהוא רוצה אותם עבור סלט בחמישה צבעים (כלומר כל צבע צריך להופיע לפחות פעם אחת...)? (17 נקודות)

ג. מחלקת אבטחת מידע דרשה שסיסמאות המחשב תהיינה מורכבות מ־6 ספרות (מתוך 10 אפשריות) ו־12 אותיות (מתוך 52 אותיות האנגלית, גדולות וקטנות). כמה סיסמאות ניתן להרכיב? (17 נקודות)

פתרון:

א. צריך לבחור 15 מתוך 123 ללא חזרה (אין סטודנט שאחראי על יותר מתפקיד אחד) ועם חשיבות לסדר (התפקידים שונים), ולכן נקבל

$$\frac{123!}{15!}$$

ב. ראשית הוא חייב לבחור אחד מכל סל. כעת, נותר לו לבחור 13 ירקות מתוך חמשת הסלים עם חזרה (יכול לבחור ירק פעמיים) וללא חשיבות לסדר (בסוף הוא עושה מזה סלט), ולכן נקבל

$$\binom{13+5-1}{13} = \binom{17}{13}$$

ג. ראשית, נבחר את מיקום הספרות ב $\binom{18}{6}$, ואז יש 10^6 אפשרויות לחלק של הספרות ו 52^{12} לחלק של האותיות. סה"כ

$$\binom{18}{6} \cdot 10^6 \cdot 52^{12}$$

אפשרויות.

2. א. יהיו $k,m,n\in\mathbb{N}$ כך ש $0\le m\le k\le n$ הוכיחו (באיזו דרך שתרצו) את הזהות הבאה:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

(17 נקודות)

ב. יהיו $k,n\in\mathbb{N}$ כך ש $0\le k\le n$ הוכיחו (באיזו דרך שתרצו) את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

שימו לב, אם אתם רוצים להשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון עליכם להוכיח את נכונותה! (17 נקודות)

פתרון:

א. אלגברית: נפתח את שני הצדדים ונראה שמגיעים לאותו דבר:

נפתח את צד שמאל ונקבל (ע"י צמצום $k!$ מהמונה והמכנה): $\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{m!(k-m)!}=\frac{n!}{m!\cdot(n-k)!\cdot(k-m)!}$.

נפתח את צד ימין ונקבל (ע"י צמצום $(n-m)!$ מהמונה והמכנה): $\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}=\frac{n!}{m!\cdot(n-k)!\cdot(k-m)!}$.

קומבינטורית: שני אגפי הזהות סופרים בכמה דרכים ניתן לבחור מתוך קבוצה של n סטודנטים k סטודנטים למועצה ומתוך k הסטודנטים במועצה הכללית לבחור m סטודנטים לועד העליון (אפשר להמחיש גם עם ממשלה ואחר כך קבינט מצומצם). אגף שמאל ברור - מספר האפשרויות לבחור את הועד, ולכל בחירה של ועד (ולכן זה כפל) יש את מספר האפשרויות לבחור מתוכו את הועד העליון. באגף ימין קודם בוחרים את m הסטודנטים לועד העליון, ולכל אפשרות כזו (ולכן יש כפל) משלימים מתוך $n-m$ הסטודנטים שנותרו את החברים במועצה הכללית.

ב. נשתמש בדרך הקומבינטורית. מתקיים: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0,\text{even}}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{k=1,\text{odd}}^{n}\binom{n}{k}$ לכן בעצם צריך להוכיח: $\sum_{k=0,\text{even}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=1,\text{odd}}^{n}\binom{n}{k}$. כיון שלכל $0\le k\le n$ הביטוי $\binom{n}{k}$ סופר את מספר תתי הקבוצות מגודל k של קבוצה מגודל n, נקבל שצריך

להוכיח שעבור קבוצה מגודל n מתקיים: מספר תתי הקבוצות שלה מגודל זוגי שווה למספר תתי הקבוצות שלה מגודל אי־זוגי. נוכיח זאת:

נסמן: $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ והיא תהיה הקבוצה מגודל n לצורך העניין, $A = \{Y \subseteq X : |Y| \text{ is even}\}, B = \{Y \subseteq X : |Y| \text{ is odd}\}$. נגדיר פונקציה $f : A \to B$ באופן הבא: לכל $Y \in A$:

$$f(Y) = \begin{cases} Y \cup \{1\} & 1 \notin Y \\ Y \setminus \{1\} & 1 \in Y \end{cases}$$

קל לראות שהיא הפיכה ע"י מציאת ההופכית $f^{-1} : B \to A$ המוגדרת: לכל $Y \in B$:

$$f(Y) = \begin{cases} Y \cup \{1\} & 1 \notin Y \\ Y \setminus \{1\} & 1 \in Y \end{cases}$$

קל לראות שההרכבה בשני הצדדים זה הזהות (בבוחן כמובן הייתם צריכים לעשות זאת!). הפונקציה חח"ע ועל ולכן גודל הקבוצות שוות מש"ל.

3. א. מהו המקדם של $x_1^4 \cdot x_3 \cdot x_4^2$ בפיתוח הביטוי $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^7$. (6 נקודות)

ב. הוכיחו (באיזו דרך שתרצו) את הזהות הבאה:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \binom{n-k}{n_1 - 1, \ldots, n_k - 1} = \left(\prod_{i=1}^{k} n_i\right) \cdot \binom{n}{n_1, \ldots, n_k}$$

(17 נקודות)

פתרון:

א. $\binom{7}{4,0,1,2} = \frac{7!}{4! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{7!}{4! \cdot 2!}$.

ב. אלגברית: $\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \binom{n-k}{n_1-1, \ldots, n_k-1} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{\prod_{i=1}^{k} (n_i - 1)!}$. כעת נצמצם את $(n-k)!$ מהמונה והמכנה, ובנוסף נכפיל מונה ומכנה ב־ $\prod_{i=1}^{k} n_i$, כאשר במכנה זה מתווסף למכפלת העצרות (כי לכל i מתקיים: $(n_i - 1)! \cdot n_i = n_i!$) ונקבל את צד ימין $\left(\prod_{i=1}^{k} n_i\right) \cdot \binom{n}{n_1, \ldots, n_k}$.

קומבינטורית: מדובר בזהות הקפטן המוכללת: נחלק משתי דרכים קבוצת n סטודנטים ל־ k וועדות שונות, כאשר בוועדה ה־i יהיו n_i סטודנטים (כל אחד יהיה בוועדה אחת בדיוק, כלומר, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), כך שלכל ועדה יהיה נציג לוועדה (הקפטן לצורך השם של הזהות).

דרך ראשונה: נבחר תחילה את הנציגים: צריך לבחור k מתוך n בלי חזרה ועם חשיבות לסדר (כי הוועדות שונות). זה נעשה ב־ $\frac{n!}{(n-k)!}$ דרכים. כעת נותר לחלק את שאר הכיתה, $n-k$ סטודנטים, לוועדות השונות שלכל ועדה בוחרים $n_i - 1$ כי הנציג כבר נבחר. זה בדיוק המקדם המולטינומי: $\binom{n-k}{n_1-1,\ldots,n_k-1}$.

דרך שניה: קודם נחלק לוועדות השונות, שזה (לפי מה שראינו בכיתה) $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ דרכים. כעת נותר לבחור נציג מכל ועדה, שזה לכל i נעשה ב־ n_i דרכים. סה"כ: $\left(\prod_{i=1}^{k} n_i\right) \cdot \binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$.

0>0