תרגיל בית 9

שאלה 1

עבור סדרות הפונקציות הבאות מצאו את פונקצית הגבול (אם היא קיימת), וקבעו אם ההתכנסות היא נקודתית או במידה שווה.

א. $f_n(x)=\cos^{2n}(x)$ בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

ב. $f_n(x)=\frac{\arctan x}{n}$ ב R.

ג. $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ בקטע $(0,\infty)$.

ד. $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ בקטע $[0,1]$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ מתקיים $0\le\cos^2 x\le 1$. בקטע הנ"ל ללא $x=0$ מתקיים $0\le\cos^2 x<1$.

נקבל עבור $x=0$: $f_n(0)=\cos^{2n}(0)=1^{2n}=1\xrightarrow{n\to\infty}1$.

עבור $x\neq 0$ מכיוון ש $0\le\cos^2 x<1$: $f_n(x)=\cos^{2n}(x)=\left(\cos^2 x\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}0$.

נקבל שפונקצית הגבול היא $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

קיבלנו סדרת פונקציות רציפות שמתכנסת לפונקציה לא רציפה ולכן זאת התכנסות נקודתי ולא התכנסות במידה שווה.

סעיף ב

$f_n(x)=\frac{\arctan x}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ופונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל

$\sup\limits_{x\in R}\left\{\frac{\arctan x}{n}-0\right\}=\frac{\pi}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ וההתכנסות היא במ"ש.

סעיף ג

$f_n(x)=\frac{1}{nx+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ופונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל

$\sup\limits_{x\in(0,\infty)}\left\{\frac{1}{nx+1}-0\right\}=1\xrightarrow{n\to\infty}\neq 0$ וההתכנסות היא אינה במ"ש.

סעיף ד

$f_n(x)=x^n(1-x^n)\xrightarrow{n\to\infty}0$ ופונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left\{x^n(1-x^n)-0\right\}$

הפונקציה $f(x)=x^n-x^{2n}$ רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ולכן מקבלת בקטע מקסימום.

$f'(x)=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}\Rightarrow nx^{n-1}(1-2x^n)=0$ הנגזרת מתאפסת ב $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

$f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\frac{1}{4};\ f_n(0)=0;\ f_n(1)=0$ המקסימום לכל n טבעי הוא $\frac{1}{4}\neq 0$ וההתכנסות היא לא במידה שווה.

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $f(x)$ בקטע I אזי $g(x)f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $g(x)f(x)$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

לא נכון. נבחר $f_n(x)=\frac{1}{n}$ בקטע $(0,1)$ שזאת סדרה שמתכנסת במידה שווה ל 0 ונבחר $g(x)=\frac{1}{x}$ אז $g(x)f_n(x)=\frac{1}{nx}$ לא מתכנס במידה שווה.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל $\sup_{x\in(0,1)}\left\{\frac{1}{nx}-0\right\}=\infty\neq 0$.

<u>שאלה 3</u>

החליטו אם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים נקודתית, במ"ש או מתבדרים בתחומים הנתונים:

א. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ בתחום $(-a,a)$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{e^{nx}}$ בתחום $[0,\infty)$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ בתחום $[0,\infty)$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

נוכיח תחילה ש $\ln(1+x)\le x$ בתחום $[0,\infty)$.

נחקור את הפונקציה $f(x)=x-\ln(1+x)\Leftarrow f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ ז"א הנגזרת חיובית לכל x בתחום $[0,\infty)$. $f(0)=0$ ואז $f(x)\ge 0$ לכל x בתחום $[0,\infty)$.

סה"כ נקבל ש $\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\le\frac{x^2}{n\ln^2 n}\le\frac{a^2}{n\ln^2 n}$.

ממבחן העיבוי נקבל שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ מתכנס ולכן טור הפונקציות שלנו מתכנס במ"ש בקטע לפי מבחן ה M של ווירשטראס.

<u>סעיף ב</u>

ננסה למצוא מקסימום לפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{e^{nx}}$. אם נגזור נקבל $f'(x)=\frac{2xe^{nx}-nx^2e^{nx}}{e^{2nx}}$.

נשווה לאפס ונקבל ש $2x-nx^2=0\Leftarrow x=0, x=\frac{2}{n}$.

$f'(x)=\frac{2x-nx^2}{e^{nx}}$ נגזור פעם שנייה את המונה בלב כדי לבחון חיוביות נגזרת שנייה בנקודה קריטית ונקבל $2-2nx$ ועבור $x=\frac{2}{n}$ נקבל שהנגזרת השנייה שלילית ז"א שעבור $x=\frac{2}{n}$ ערך הפונקציה הוא מקסימאלי (מכיוון שהפונקציה רציפה ואין נקודות קיצון נוספות).

$\frac{x^2}{e^{nx}}\le\frac{4}{n^2e^2}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2e^2}$ מתכנס, טור הפונקציות מתכנס במ"ש לפי מבחן ה M של ווירשטראס.

<u>סעיף ג</u>

נשים לב שאם $x>0$ אז $\frac{1}{1+x^2}<1$ ולכן $\frac{1}{x}=x\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$.

הטור מתכנס נקודתית ל $\frac{1}{x}$ כאשר $x>0$.

כאשר $x=0$ הטור מתכנס נקודתית ל 0. סה"כ הטור מתכנס נקודתית לפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}.$$

היות והפונקציות $\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ רציפות והן מתכנסות נקודתית לפונקציה לא רציפה, ההתכנסות לא במ"ש.

<u>שאלה 4</u>

א. חשב וציין את תחום ההתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}$. נשתמש במבחן השורש $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|nx^{n+2}\right|}=|x|$.

תחום ההתכנסות הוא $-1<x<1$. נשים לב שאם נציב $x=1,x=-1$ נקבל טור מתבדר.

בתחום ההתכנסות הטור מתכנס בהחלט, ולכן ניתן לשנות את סדר האיברים.

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+3)x^{n+2}-3x^{n+2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)x^{n+2}-3\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+3)x^{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+3}=\frac{x^4}{1-x}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)x^{n+2}=\frac{4x^3-3x^4}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}=\frac{x^3}{1-x}.$$

סה"כ נקבל ש $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}=\frac{4x^3-3x^4}{(1-x)^2}-\frac{3x^3}{1-x}=\frac{x^3}{(1-x)^2}$.

<u>סעיף ב</u>

נסתכל על הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot x^n$ בתחום $\left[\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right]$ ונמצא נוסחה לסכומו. נציב $x=\frac{1}{2}$ ונקבל את הדרוש.

מחישוב סכום סדרה הנדסית אינסופית $\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}$.

ההתכנסות בתחום הנ"ל היא במידה שווה, ולכן נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$.

כלומר: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x)$ ולכן $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n=\frac{-\ln(1-x)}{x}$.

טור הנגזרות הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}$ והוא מתכנס במידה שווה בקטע המדובר ולכן

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\frac{1}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}$ כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}=-\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)'=\frac{1}{(1-x)x}+\frac{\ln(1-x)}{x^2}$

נציב $x=\frac{1}{2}$ ונקבל $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}=2+2\ln\frac{1}{2}$.

שאלה 5

עבור הטורים הבאים קבע לאילו ערכי x הטור מתכנס בתנאי\בהחלט

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)}$.

פתרון שאלה 5

סעיף א

עבור $x>0$: $\frac{1-x}{1+x}=\frac{1+x-2x}{1+x}=1-\frac{2x}{1+x}\Rightarrow\frac{1-x}{1+x}<1$

$\frac{1-x}{1+x}=\frac{-1-x+2}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}\Rightarrow -1<\frac{1-x}{1+x}$.

סה"כ קיבלנו ש $-1<\frac{1-x}{1+x}<1$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ מתכנס כטור גיאומטרי.

מכיוון ש $\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|\le\left|\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|$ נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|$ מתכנס.

ז"א הטור שלנו מתכנס בהחלט.

עבור $x<0$: $\frac{1-x}{1+x}=\frac{-1-x+2}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$.

אם $-1<x<0$: $-1+\frac{2}{1+x}>1$ עבור $x<-1$: $-1+\frac{2}{1+x}<-1$.

סה"כ נקבל $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$. $\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|}\xrightarrow{n\to\infty}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$ וממבחן השורש הטור מתבדר.

עבור $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ הטור מתכנס בתנאי. על פי לייבניץ.

סעיף ב

$$a_n=\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)},\ a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)(1+x^{n+1})}\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x}{1+x^{n+1}}\right|$$

סה"כ נקבל שלכל $x\ne-1$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל $x\ne-1$.

שאלה 6

מצא את תחום ההתכנסות עבור טורי החזקות הבאים:

א. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{4n^2+n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$.

ב. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{8^n\sqrt{n}}(x-2)^{3n}$.

פתרון שאלה 6

סעיף א

נמצא תחילה את רדיוס ההתכנסות $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+5}{3^n\left(4n^2+n\right)}}=\frac{1}{3}$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 3.

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור $x=3$ נקבל את הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{4n^2+n}$. הטור חיובי וניתן להשתמש במבחן השוואה השני.

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר. $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+5}{4n^2+n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n}{4n^2+n}=\frac{1}{4}$ הטורים חברים.

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{4n^2+n}$ מתבדר.

עבור $x=-3$ נקבל את הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{4n^2+n}$.

הטור הוא טור מתחלף כאשר $a_n=\frac{n+5}{4n^2+n}$. a_n סדרה יורדת ובנוסף מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס.

תחום ההתכנסות הוא: $-3\le x<3$.

סעיף ב

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{8^n\sqrt{n}}(x-2)^{3n}$$

נמצא תחילה את רדיוס ההתכנסות ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 2 ז"א הטור מתכנס כאשר $|x-2|<2 \Leftarrow 0<x<4$.

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור $x=4$ נקבל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. לכל $3\le n$ מתקיים $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$. הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר ולכן גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ מתבדר.

עבור $x=0$ נקבל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}$.

הטור הוא טור מתחלף כאשר $a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. נשים לב ש $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

נוכיח ש a_n סדרה יורדת.

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

לכל $x>e^2$ הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת ז"א לכל $n\ge 9$ הסדרה $a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ יורדת.

תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס.

תחום ההתכנסות הוא: $0\le x<4$.