בהגדרה: תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\rho)$. נגיד שf רציפה בx אם: לכל קבוצה פתוחה A ב(Y,ρ) שמכילה את $f(x)$, קיימת קבוצה פתוחה B שמכילה את x כך ש$f[B]\subseteq A$.

פונקציה f תיקרא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה.

שקול: לכל קבוצה פתוחה A ב(Y,ρ), $f^{-1}[A]$ פתוחה ב(X,τ).

שקול: לכל קבוצה סגורה A ב(Y,ρ), $f^{-1}[A]$ סגורה ב(X,τ).

דוגמאות:

1. כל פונקציה ממרחב דיסקרטי לאיזשהו מרחב, תמיד רציפה. הסבר: כי במרחב דיסקרטי כל הקבוצות פתוחות. אז ברור שהתמונה ההפוכה של כל קבוצה פתוחה תהיה פתוחה.
2. כל פונקציה לתוך מרחב טריוויאלי מאיזשהו מרחב, היא רציפה. הסבר: במרחב הטריוויאלי הקבוצות הפתוחות היחידות הן קבוצה ריקה, והמרחב כולו. התמונה ההפוכה של קבוצה ריקה היא תמיד קבוצה ריקה, והתמונה ההפוכה של המרחב כולו היא המרחב כולו, ושתי הקבוצות האלה פתוחות בכל מרחב טופולוגי.
3. פונקציית הזהות $id:(X,\tau)\to(X,\tau)$ תמיד רציפה, כי לכל קבוצה פתוחה A ב(X,τ), $id^{-1}[A]=A$ שכאמור היא פתוחה ב(X,τ)
4. חשוב לשים לב: פונקצית הזהות מקבוצה לעצמה עם טופולוגיות שונות, היא לא בהכרח רציפה.

דוגמא: נקח $X=\mathbb{Z}$, עם τ הטופולוגיה הטריוויאלית, וρ הטופולוגיה הדיסקרטית. אז פונקציית הזהות

$$id:(\mathbb{Z},\tau)\to(\mathbb{Z},\rho)$$

אינה רציפה. כי למשל $\{1\}$ פתוח ב$(\mathbb{Z},\rho)$ אבל $id^{-1}\{1\}=\{1\}$ אינה פתוחה בטופולוגיה הטריוויאלית.

תרגיל: נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{R}$: $\tau=\{\emptyset,\mathbb{R},\{2\}\}$. נגדיר פונקציה $f:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau)$ ע"י $f(x)=2x$. באיזה נקודות הפונקציה רציפה?

פתרון: עבור $x=1$, $f(x)=2$ יש לה סביבה פתוחה $\{2\}$. האם יש קבוצה פתוחה סביב 1, שהתמונה שלה מוכלת בנקודון 2? לא. כי הקבוצה הפתוחה היחידה שמכילה את 1 היא $\mathbb{R}$, ו$f[\mathbb{R}]=\mathbb{R}\not\subseteq\{2\}$.

לכל $x\neq 1$, $f(x)\neq 2$ ולכן הקבוצה הפתוחה היחידה סביב $f(x)$ היא $\mathbb{R}$, ואז צריך למצוא קבוצה פתוחה סביב x שהתמונה שלה מוכלת ב$\mathbb{R}$, אבל הפונקציה הולכת לתוך $\mathbb{R}$, אז התמונה של כל קבוצה מוכלת ב$\mathbb{R}$.

תרגיל: הוכיחו שסכום של פונקציות רציפות אינו בהכרח רציף.

פתרון: נסתכל על פונקציית הזהות $id:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau)$. היא רציפה כי פונקציית הזהות תמיד רציפה. אבל $id+id=f$ כאשר $f(x)=2x$ שראינו שאינה רציפה, כי יש נקודה שהיא לא רציפה בה.

תזכורת: ראיתם בהרצאה שפונקציה רציפה שומרת על התכנסות. כלומר, אם $x_n\to x$ וf רציפה, אז $f(x_n)\to f(x)$. הכיוון ההפוך לא נכון. כלומר, פונקציה ששומרת על התכנסות לא בהכרח רציפה.

דוגמא: נסתכל על $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ עם 2 טופולוגיות: $\tau=\{O:p\notin O\vee|O^c|\leq\aleph_0\}$. ו$\rho$ שווה לטופולוגיה הדיסקרטית.

נסתכל על פונקציית הזהות $id:(X,\tau)\to(X,\rho)$.

הפונקציה לא רציפה, כי $\{p\}$ פתוח ב(X,ρ). $id^{-1}\{p\}=\{p\}$ שאינו פתוח בτ לפי הגדרה.

היא כן שומרת התכנסות. הסבר: נניח שיש לנו סדרה $x_n\to x$ בτ. אז בתרגול הקודם הוכחנו שx_n קבועה לבסוף על x. לכן $id(x_n)$ היא סדרה קבועה לבסוף על $id(x)$. ומכאן ש $id(x_n)\to id(x)$.

תתי מרחבים

הגדרה: יהי (X,τ) ממרחב טופולוגי ו$Y \subseteq X$. נגדיר על Y טופולוגיה: $\tau_Y = \{Y \cap O : O \in \tau\}$ במילים: הקבוצות הפתוחות הן כל הקבוצות שמתקבלות ע"י לקיחת קבוצה פתוחה מX, ולחתוך אותה עם Y.

הטופולוגיה הזאת נקראת "טופולוגיית תת המרחב".

לדוגמא: $X = \mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית, $Y = [0,1]$, אז $[0,0.5)$ פתוח בY. הסבר: נקח $O = (-1,0.5)$ זאת קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית. ו$O \cap Y = [0,0.5)$.

שימו לב: קבוצה פתוחה בתת מרחב לא בהכרח פתוחה במרחב כולו!

תרגיל: יהי (X,d) מרחב מטרי ו$Y \subseteq X$. יש שתי דרכים להגדיר טופולוגיה על Y:

1. נגדיר על X את הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה, τ_{met}, ואז ניקח את טופולוגיית תת המרחב על Y, τ'.
2. נצמצם את המטריקה לY ונקבל שY הוא מרחב מטרי. המטריקה על Y משרה טופולוגיה ρ.

האם הטופולוגיות האלה שוות?

פתרון: נוכיח שוויון בין שתי הטופולוגיות.

הקבוצות הפתוחות בτ' הן מהצורה $O \cap Y$ כאשר O פתוחה בX. O פתוחה בX, זה אומר שהיא איחוד של כדורים פתוחים. כלומר $O = \bigcup B(x_i, r_i)$. אז הקבוצות הפתוחות בY הן $Y \cap (\bigcup B^X(x_i,r_i)) = \bigcup (Y \cap B^X(x_i,r_i))$.

הקבוצות הפתוחות בρ הן איחוד של כדורים פתוחים בY. כלומר, $\bigcup B^Y(y_i,r_i)$.

אנחנו רוצים להראות הכלה דו כיוונית בין הטופולוגיות.

$\rho \subseteq \tau'$. כלומר, אנחנו רוצים להראות שכל קבוצה שפתוחה בטופולוגיה השניה, פתוחה גם בטופולוגיה הראשונה. קבוצה שפתוחה בטופולוגיה השניה היא מהצורה $\bigcup B^Y(y_i,r_i)$. קל לראות ש $B^Y(y_i,r_i) = B^X(y_i,r_i) \cap Y$. לכן $\bigcup B^Y(y_i,r_i) = \bigcup (B^X(y_i,r_i) \cap Y) = Y \cap (\bigcup B^X(y_i,r_i))$ שווה לY חיתוך עם קבוצה פתוחה מX, לכן פתוח בטופולוגיה הראשונה.

$\tau' \subseteq \rho$: תהי O קבוצה פתוחה בX. אנחנו רוצים להוכיח ש$O \cap Y$ פתוחה לפי הטופולוגיה השניה, כלומר הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה על Y. תהי $y \in O \cap Y$. מכיוון שO פתוחה בX, אז יש $B^X(y,r) \subseteq X$. אז

$$B^Y(y,r) = B^X(y,r) \cap Y \subseteq O \cap Y$$

לכן $O \cap Y$ פתוחה בטופולוגיה שמושרית מהמטריקה של Y.

תרגיל: יהי (X,τ)מ"מ. ו (Y,τ_Y) תת מרחב. (כלומר $Y \subseteq X$ וτ_Y היא הטופולוגיה שמושרית מτ). הוכיחו שפונקציית ההכלה $i : Y \to X$ רציפה. ($i(y) = y$)

פתרון: תהי O קבוצה בX. $i^{-1}[O] = Y \cap O$. פתוחה בטופולוגיית תת המרחב על Y, לפי הגדרה.

תרגיל: יהי (X,τ) מ"מ. ו (Y,τ_Y) תת מרחב. הוכיחו שהקבוצות הסגורות בY הן כל הקבוצות מהצורה $Y \cap C$ עבור C קבוצה סגורה בX.

פתרון:

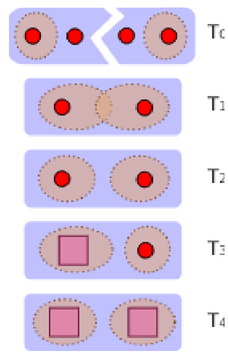
ראשית, נראה שאם C סגורה בX, אז $C \cap Y$ סגורה בY.

C סגורה בX לכן C^c פתוחה בX.

$$Y \setminus (C \cap Y) = Y \setminus C = Y \cap C^c$$

פתוחה בY בתורה Y חיתוך עם קבוצה פתוחה מX.

איור 1: תכונות הפרדה



כעת, נניח שA היא קבוצה סגורה בתוך Y. אז $Y \setminus A$ היא קבוצה פתוחה בY. כלומר, קיימת איזשהי קבוה פתוחה O בX כך ש$Y \setminus A = Y \cap O$. אזי $A = Y \cap O^c$. O^c סגורה בX. קיבלנו שA היא חיתוך של Y עם קבוצה סגורה בX.

תרגיל:

תהי $f : (X, \tau) \to (Y, \rho)$. אז היא משרה פונקציה $\hat{f} : (X, \tau) \to (Im(f), \rho')$ כאשר ρ' מסמל את טופולוגיית תת המרחב.

הוכיחו שאם f רציפה אז $\hat{f}$ רציפה.

פתרון: תהי O קבוצה פתוחה ב$Im(f)$. כלומר, קיימת קבוצה פתוחה U בY כך ש$O = Im(f) \cap U$.

$$\hat{f}^{-1}[O] = f^{-1}[O] = f^{-1}[U]$$

הסבר: $x \in f^{-1}[O] \iff f(x) \in O \iff f(x) \in U \cap Im(f) \iff f(x) \in U \iff x \in f^{-1}[U]$

תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי וO_i אוסף של קבוצות פתוחות שהאיחוד שלהן הוא כל X. יהיו $f_i : O_i \to Y$ פונקציות רציפות. אם הפונקציות מזדהות על החיתוכים (כלומר, אם $x \in O_i \cap O_j$ אז $f_i(x) = f_j(x)$) אז הפונקציות מגדירות פונקציה $f : X \to Y$ כך שלכל x, שייך לאיזשהי קבוצה פתוחה O_i, אז נגדיר $f(x) = f_i(x)$.

אזי $f : X \to Y$ רציפה.

הוכחה: תהי O קבוצה פתוחה בY. $f^{-1}[O] = \bigcup f_i^{-1}[O]$

כל $f_i^{-1}[O]$ פתוחה בO_i. אז היא מהצורה $A_i \cap O_i$ כאשר A_i פתוחה בX.

$$f^{-1}[O] = \bigcup (A_i \cap O_i)$$

חיתוך סופי של קבוצות פתוחות בX הוא פתוח בX. לכן לכל i $A_i \cap O_i$ פתוח בX. איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות בX הוא פתוח בX. לכן $f^{-1}[O]$ פתוחה בX.

הערה: אותה טענה נכונה עבור אוסף סופי של קבוצות סגורות שמכסה את כל המרחב.

תכונות הפרדה

1. הגדרה: מרחב טופולוגיה (X, τ) יקרא בעל תכונה הפרדה:

(א) T_0 אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1 \in U$ ו $x_2 \notin U$ או להיפך.

(ב) T_1 אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1 \in U$ ו $x_2 \notin U$. (שימו לב שזה אומר שקיימת גם V פתוחה כך ש$x_2 \in V$ ו $x_1 \notin V$)

(ג) T_2 (האוסדורף) אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימות U_1וU_2 פתוחות כך ש $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ ו- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(ד) T_3 אם הוא T_1 ואפשר להפריד קבוצה סגורה ונקודה שאינה בקבוצה. כלומר לכל S סגורה ו $x \notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות $x \in U_1, S \subseteq U_2$.

(ה) T_4 הוא T_2 ואפשר להפריד כל 2 קבוצות סגורות זרות. כלומר, לכל S_1, S_2 סגורות, קיימות U_1, U_2 קבוצות פתוחות וזרות כך ש$S_1 \subseteq U_1, S_2 \subseteq U_2$.

2. דוגמאות:

שרפינסקי: $X = \{a,b\}$ $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. מקיים את T_0 כי שתי נקודות שונות הן בהכרח a וb, ויש קבוצה פתוחה סביב a, $\{a\}$ שלא מכילה את b. נשים לב שאין סביבה פתוחה של b שלא מכילה את a, ולכן המרחב הוא לא T_1. בפרט, הוא לא מקיים שום תכונת הפרדה אחרת.

תרגיל: מה תכונת ההפרדה הכי חזקה שמקיים המרחב הקוסופי על קבוצה אינסופית?

פתרון: תהי X קבוצה אינסופית. הקבוצות הפתוחות הן כל הקבוצות שהמשלים שלהן סופי. נראה שהמרחב מקיים T_1, אבל לא T_2.

T_1: יהיו $a \neq b$. נקח $O_1 = \{a\}^c$ זאת קבוצה פתוחה שמכילה את b ולא את a. וניקח $O_2 = \{b\}^c$, זאת קבוצה פתוחה שמכילה את a ולא את b.

(שימו לב שT_1 שקול להגיד שלכל $a \neq b$ יש קבוצה פתוחה סביב a שלא מכילה את b. כי את הכיוון השני נקבל מהסימטריות)

לא T_2: נניח בשלילה שהמרחב הוא T_2. יהיו $a \neq b$. יש קבוצות פתוחות זרות $a \in O_1, b \in O_2$. כלומר, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

$$O_1^c \cup O_2^c = (O_1 \cap O_2)^c = \emptyset^c = X$$

O_i^c סופיות. איחוד של שתי קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית, בסתירה לאינסופיות של X.

הערה: O_i הן קבוצות פתוחות *לא ריקות* ולכן המשלים שלהן סופי. הן לא ריקות כי יש בהן את a וb בהתאמה.