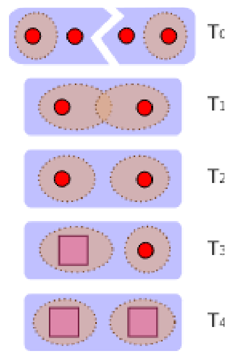
איור 1: תכונות הפרדה



הודעה: יש בוחן ב$27/05$ ב$18:00$. החומר: אני אבדוק בסוף השיעור. תהיה שאלה מהש"ב. הבוחן יהיה בזום. והבוחן מגן.

תכונות הפרדה

1. הגדרה: מרחב טופולוגיה (X,τ) יקרא בעל תכונה הפרדה:
   (א) T_0 אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1 \in U$ ו $x_2 \notin U$ או להיפך.
   (ב) T_1 אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1 \in U$ ו $x_2 \notin U$. (שימו לב שזה אומר שקיימת גם V פתוחה כך ש $x_2 \in V$ ו $x_1 \notin V$)
   (ג) T_2 (האוסדורף) אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימות U_1 וU_2 פתוחות כך ש $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ ו- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
   (ד) T_3 אם הוא T_1 ואפשר להפריד קבוצה סגורה ונקודה שאינה בקבוצה. כלומר לכל S סגורה ו $x \notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות $x \in U_1, S \subseteq U_2$.
   (ה) T_4 הוא T_2 ואפשר להפריד כל 2 קבוצות סגורות זרות. כלומר, לכל S_1, S_2 סגורות, קיימות U_1, U_2 קבוצות פתוחות וזרות כך ש$S_1 \subseteq U_1, S_2 \subseteq U_2$.
2. הערה: התכונות בסדר חוזק עולה. כלומר, כל מרחב שהוא T_i, הוא בהכרח גם T_{i-1}, וכן הלאה באינדוקציה.

דוגמאות:
1. מרחב שרפינסקי: $X = \{a,b\}$ $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. ל$a$ יש סביבה שמפרידה מb, ולb אין סביבה שמפרידה אותו מa. לכן הוא T_0 ולא T_1.
2. על קבוצה אינסופית X, נגדיר את הטופולוגיה הקוסופית. נוכיח שזה T_1 ולא T_2. יהיו $a \neq b$. נקח את $\{a\}^c$ זאת קבוצה פתוחה (כי המשלים סופי) היא מכילה את b ולא את a. באותו אופן נקח את $\{b\}^c$.

למה זה לא T_2? תהי O קבוצה פתוחה שמכילה את a ולא את b. זה אומר שO^c סופי. כל קבוצה שלא נחתכת עם O מוכלת בO^c. אז היא תהיה סופית. אבל במרחב אינסופי קבוצה פתוחה לא יכולה להיות סופית, כי המשלים שלה הוא סופי. ולכן לא קיימת קבוצה פתוחה שמכילה את b ולא נחתכת עם O.

למעשה, בטופולוגיה הזאת כל שתי קבוצות פתוחות לא ריקות נחתכות.

3. $\mathbb{R} \cup \{p\}$- איזה תכונות הפרדה היא מקיימת?
כבר הוכחנו שהיא מקיימת T_2 (האוסדורף).
הקבוצות הפתוחות הן כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ והקבוצות שמכילות את p עם משלים בן מניה.
האם היא T_3? תהי x נקודה וA קבוצה סגורה. $x \notin A$.
אם $x = p$ אז $A \subseteq \mathbb{R}$ ולכן A פתוחה, ומהגדרה גם A^c פתוחה.
אם $x \neq p$ אז $\{x\}$ פתוח, ולכן נקח את $\{x\}$ ואת $\{x\}^c$.
האם היא T_4?
יהיו A, B שתי קבוצות סגורות זרות. לא ייתכן ששתיהן מכילות את p. בה"כ, A לא מכילה את p. אז A פתוחה. אז נקח את A ואת A^c.
הינה הבאנו דוגמא למרחב T_4 שאינו מטריזבילי.

תרגיל: יהי X מרחב סופי T_1. הוכיחו שX דיסקרטי.

הוכחה: מספיק להוכיח שכל נקודון פתוח. יהי $a \in X$. לכל $b \neq a \in X$, יש קבוצה פתוחה V_b כך ש$a \in V_b$ ו$b \notin V_b$.

$$\bigcap_{b \in X} V_b = \{a\}$$

זה חיתוך סופי של קבוצות פתוחות ולכן פתוח.

תרגיל: הוכיחו שמרחב הוא T_1 אמ"ם כל נקודון סגור.

פתרון: נניח שכל נקודון סגור. יהיו $a \neq b$. $\{b\}^c$ היא קבוצה פתוחה שמכילה את a ולא את b. וכנ"ל ההפך.
נניח שהמרחב T_1. תהי $a \in X$. רוצים להוכיח ש$\{a\}$ סגור. שקול להוכיח ש$\{a\}^c$ פתוח. לכל $b \in \{a\}^c$, יש קבוצה O_b פתוחה שמכילה את b ולא את a. שקול:

$$b \in O_b \subseteq \{a\}^c$$

לכן

$$\{a\}^c = \bigcup_{b \neq a} O_b$$

תרגיל: במרחב T_2 לכל סדרה יש גבול יחיד.

הוכחה: תהי x_n סדרה נניח ש$x_n \to a, x_n \to b$, ונוכיח ש$a = b$. אם $a \neq b$ אז יש קבוצות פתוחות זרות O_a, O_b. מהגדרת התכנסות, החל ממקום מסויים כל איברי הסדרה נמצאים בO_a וגם בO_b. אבל הן זרות! סתירה.

הערה: העובדה שמרחב מקיים שלכל סדרה יש גבול יחיד, לא אומרת שהוא T_2. להלן: נסתכל על X שאינו בן מניה, עם הטופולוגיה הקו-מנייתית. בטופולוגיה הזאת $x_n \to x$ אמ"ם x_n קבועה לבסוף על x. הסבר: תהי $x_n \to x$. נקח את $O = \{x_n\}^c \cup \{x\}$. זאת קבוצה פתוחה שמכילה את x. החל ממקום מסויים כל איברי הסדרה נמצאים בה, אז הם הקבוצה השמאלית של האיחוד, כלומר שווים לx.
היא לא T_2- אותה הוכחה כמו הטופולוגיה הקוסופית.

תזכורת: A צפופה בX אם לכל קבוצה פתוחה לא ריקה O, $A \cap O \neq \emptyset$.

תרגיל: יהיו $f, g : X \to Y$ רציפות, Y הוא T_2, וקיימת קבוצה צפופה $A \subseteq X$ ששתי הפונקציות שוות עליה. הוכיחו ש$f = g$.

הוכחה: יהי $x \in X$. צריך להוכיח ש$f(x) = g(x)$. נניח ש$f(x) \neq g(x)$. קיימות $f(x) \in O_f, g(x) \in O_g$ פתוחות זרות. נסתכל על $f^{-1}(O_f), g^{-1}(O_g)$ אלה קבוצות פתוחות. $x \in f^{-1}(O_f) \cap g^{-1}(O_g)$. לכן $f^{-1}(O_f) \cap g^{-1}(O_g)$ קבוצה פתוחה לא ריקה. לכן היא נחתכת עם הקבוצה הצפופה. כלומר, קיים $a \in A, f^{-1}(O_f), g^{-1}(O_g)$. אז

$$O_f \ni f(a) = g(a) \in O_g$$

בסתירה לכך שהקבוצות זרות.

קשירות

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי. נגיד שX לא קשיר אם $X = U \cup V$ קבוצות פתוחות זרות לא ריקות. נובע שכל אחת היא המשלים של השניה. לכן זה שקול לאיחוד של קבוצות סגורות זרות.
שקול: קיימת קבוצה סגוחה לא טריוויאלית.
דוגמאות:

1. הטופולוגיה הקוסופית על מרחב אינסופי היא קשירה, כי לא קיימת קבוצה סגוחה לא טרייואלית, כי קבוצה פתוחה חייבת להיות אינסופית בתנאים הנ"ל, וקבוצה סגורה היא סופית, אז קבוצה לא יכולה להיות גם וגם.
2. $\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה האוקלידית לא קשיר, כי

$$\mathbb{Q} = ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q})$$

תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי ו$A \subseteq X$ צפוף. הוכיחו שאם A קשיר אז X קשיר.
הוכחה: נניח בשלילה שX לא קשיר. אז $X = U \cup V$. אז

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$$

$A \cap U, A \cap V$ פתוחות בA מהגדרת תת מרחב, והן לא ריקות! כי A צפופה, לכן החיתוך שלה עם כל קבוצה פתוחה מX הוא לא ריק. וברור שהן זרות כי U וV זרות. בסתירה לכך שA קשיר.
שימו לב שהכיוון השני לא נכון! למשל $\mathbb{Q}$ ו$\mathbb{R}$.
דוגמא נוספת: מרחב טופולוגי מעניין נוסף הוא "הישר של סורגנפריי".
הוא מוגדר כך: הקבוצה היא $\mathbb{R}$, הקבוצות הפתוחות הן איחוד כלשהו של קטעים מהצורה $[a, b)$.
האם היא קשירה?
פתרון: לא. כי

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

$$(-\infty, 0) = \bigcup [-n, 0)$$
$$[0, \infty) = \bigcup [0, n)$$

רכיבי קשירות

הגדרה: במרחב טופולוגי X, רכיב קשירות היא תת קבוצה קשירה מקסימלית.
תרגיל: בישר של סרוגנפריי- מה הם רכיבי הקשירות?

פיתרון : הנקודונים. נוכיח שכל קבוצה עם יותר מנקודה אחת אינה קשירה.
תהי A קבוצה עם $a < b \in A$. אז

$$A = ((-\infty, b) \cap A) \cup ([b, \infty) \cap A)$$