פתרון הבוחן:

הפתרון כאן אינו תורה מסיני, ולכן אם פתרתם בדרך שונה זה לא אומר שטעיתם (אם כי זה בהחלט מגדיל את הסיכויים).

1. הוכיחו או הפריכו:

(א) הוכחה. נוכיח את שני הכיוונים:

i. אם $A=\phi$, אז אכן $A\times B=B\times A=\phi$. כך גם אם $B=\phi$. אם $A=B$ אז $A\times B=A\times A=B\times A$. סה"כ שלושת המקרים השונים נותנים את התוצאה הדרושה.

ii. לכיוון השני, אם $A\times B=B\times A$, לפי ההגדרה של מכפלה קרטזית, נקבל שקבוצת כל הזוגות הסדורים עם איבר ראשון מהקבוצה A ואיבר שני מהקבוצה B שווה לקבוצת כל הזוגות הסדורים עם איבר ראשון מהקבוצה B ואיבר שני מהקבוצה A. כלומר, לכל זוג עם איבר ראשון מהקבוצה A ואיבר שני מהקבוצה B יש זוג סדור עם איבר ראשון מהקבוצה B ואיבר שני מהקבוצה A. לכן, לכל איבר מהקבוצה A יש איבר מהקבוצה B ששווה לו (ולכן $A\subseteq B$) וגם לכל איבר מהקבוצה B יש איבר מהקבוצה A ששווה לו (ולכן $B\subseteq A$); סה"כ, נקבל (לפי הכלה דו־כיוונית) שהקבוצה A שווה לקבוצה B. כל זאת, כמובן, תחת ההנחה שבכלל קיימים זוגות סדורים כאלה. אם לא קיימים זוגות סדורים כאלה, לפי ההגדרה זה אומר שאין איברים בקבוצה A או שאין איברים בקבוצה B, וסה"כ אחת מהקבוצות ריקה. לכן כל המקרים האפשריים הם שאחת מהקבוצות ריקה או שהקבוצות שוות, כמו שרצינו להוכיח.

(ב) הוכחה. יהי $x\in B$. כעת, או $x\in A$ או $x\notin A$, ולכן:

$$(x\in B)\wedge((x\in A)\vee(x\notin A))$$

ולפי פילוג:

$$((x\in B)\wedge(x\in A))\vee((x\in B)\wedge(x\notin A))$$

מכיוון שמתקיים $A \subseteq B$, נקבל שמתקיים: $(x \in A) \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)$

ולכן:

$$(x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))$$

כלומר $x \in A \cup (B \backslash A)$. הכיוון השני הפוך.

(ג) הפרכה רצינית. נבחר $A = \{1\}$, ואז בקבוצה A יש איבר אחד, ובקבוצת החזקה יש שני איברים: $P(A) = \{\{1\}, \phi\}$, אבל בקבוצה $P(A) \backslash A$ יש שני איברים ($P(A) \backslash A = P(A)$) ולא $2^1 - 1 = 1$ איברים.

2. נוכיח באינדוקציה את הרמז. עבור $n = 1$ נקבל:

$$1^{-2} = 1 \leq 2 - 1$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$. נניח שהטענה נכונה עבור שלב n מסויים, כלומר:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור השלב הבא, כלומר צריך להוכיח:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

לפי הנחת האינדוקציה, $\sum_{k=1}^{n} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, ולכן:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^{-2} = \sum_{k=1}^{n} k^{-2} + (n+1)^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

כעת,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$

ולכן:

$$-\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}$$

וסה"כ:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

והוכחנו את הטענה שברמז באינדוקציה. כעת, ברור שמתקיים:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

ולכן, בעזרת הרמז, הוכחנו את הטענה.

3. נבדוק האם התכונות הדרושות מתקיימות.

(א) לגבי כל אחד מהיחסים, צריך לבדוק האם רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות מתקיימות:

i. אנו צריכים לבדוק רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות.

א'. רפלקסיביות: יהי $x \in A$. מכיוון שהיחסים R, S הם יחסי שקילות, $(x,x) \in R$ וגם $(x,x) \in S$ ולכן לפי הגדרת חיתוך, $(x,x) \in R \cap S$.

ב'. סימטריות: יהי $(x,y) \in R \cap S$. לכן, $(x,y) \in R$ וגם $(x,y) \in S$. מכיוון ששני היחסים יחסי שקילות, הם סימטריים, ולכן $(y,x) \in R$ וגם $(y,x) \in S$, ולכן $(y,x) \in R \cap S$.

ג'. טרנזיטיביות: יהיו $(x,y),(y,z) \in R \cap S$. לכן, $(x,y),(y,z) \in R$ וגם $(x,y),(y,z) \in S$. שני היחסים הם יחסי שקילות, לכן טרנזיטיביים ולכן $(x,z) \in R$ וגם $(x,z) \in S$. לכן $(x,z) \in R \cap S$. סה"כ, היחס הוא יחס שקילות.

ii. היחס אינו יחס שקילות. נפריך ע"י: $A = \{1,2,3\}$, $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$, $S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$. נקבל ש:

$$((A \times A) \backslash R) \cup S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$$

לא טרנזיטיבי ולכן לא יחס שקילות.

iii. אותה דוגמה כמו בסעיף הקודם. נקבל ש:

$$R \backslash S = \{(1,2),(2,1)\}$$

אינו סימטרי.

(ב) נבדוק האם כל אחת מהתכונות מתקיימת:

i. רפלקסיביות לא מתקיימת, כי 2 לא מחלק את 9, ולכן הזוג $(3,3)\notin R$.

ii. סימטריות מתקיימת, כי אם 2 מחלק את mn הוא גם מחלק את nm קרי $(m,n)\in R\longrightarrow (n,m)\in R$.

iii. טרנזיטיביות לא מתקיימת, כי $(3,2),(2,3)\in R$ אך $(3,3)\notin R$.

iv. היחס לא אנטי־סימטרי, כי $(2,1)\in R$ וגם $(1,2)\in R$.

4. זכרו, יכולה להיות יותר מדרך אחת להצרין.

(א) נסמן את "הבוחן קשה" באות p, הסטודנט למד יהיה q והמתרגלים יודעים לתרגל יהיה r. נקבל:

$$p\leftrightarrow(\neg q\vee\neg p)$$

(ב) הצייד סר פנים יהיה A, הצייד נסער יהיה B, הוא יצא מהבית C, שלח חץ באחד D, לא קם בחמש E. "אלא אם" מבטא הפרש סימטרי, בשאלה אין קשר נראה לעין בין יצא מהבית לקם בחמש. לכן:

$$(((A\wedge B)\longrightarrow C)\wedge\neg(\neg D\longrightarrow\neg E)))\vee((\neg D\longrightarrow\neg E)\wedge\neg((A\wedge B)\longrightarrow C))$$

שוב, אפשר לעשות זאת ביותר מדרך אחת.

5. נשתמש בפעולות על קבוצות:

$$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$$

לפי הגדרת ההפרש הסימטרי:

$$A\cap(B\triangle C)=A\cap((B\backslash C)\cup(C\backslash B))$$

לפי הפילוג (דיסטריביוטיביות) של איחוד וחיתוך:

$$A \cap ((B \backslash C) \cup (C \backslash B)) = (A \cap (B \backslash C)) \cup (A \cap (C \backslash B))$$

נייצג את ההפרשים בעזרת המשלימים:

$$(A \cap (B \backslash C)) \cup (A \cap (C \backslash B)) = (A \cap (C^c \cap B)) \cup (A \cap (B^c \cap C))$$

לפי הקיבוציות (אסוציאטיביות) והחילופיות (קומוטטיביות) של החיתוך:

$$(A \cap (C^c \cap B)) \cup (A \cap (B^c \cap C)) = ((A \cap B) \cap C^c) \cup ((A \cap C) \cap B^c)$$

נחזור חזרה לייצוג ע"י הפרש:

$$((A \cap B) \cap C^c) \cup ((A \cap C) \cap B^c) = ((A \cap B) \backslash C) \cup ((A \cap C) \backslash B)$$

כעת, בהפרש אנחנו מורידים מהקבוצה רק את האיברים שנמצאים גם בה וגם בקבוצה השנייה. כלומר, $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$. במקרה שלנו, נקבל ש:

$$((A \cap B) \backslash C) \cup ((A \cap C) \backslash B) = ((A \cap B) \backslash (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \backslash (A \cap B))$$

ולפי הגדרת ההפרש הסימטרי:

$$((A \cap B) \backslash (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \backslash (A \cap B)) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

6. לא קיים x ממשי עבורו קיים y ממשי כך ש $x < y$ וגם $x^2 > y^2$. ברור שהטענה לא נכונה - נבחר למשל $x = -10, y = 5.67$. שתי הטענות שקולות זו לזו, ולכן שתיהן מופרכות ע"י דוגמה זו.