<u>בוחן בקורס מתמטיקה בדידה (שאלות+פיתרונות)</u>

הוראות:

- משך הבחינה הוא שעה.
- <u>יש לענות על כל השאלות</u>.
- הבחינה היא בחינה סגורה, דהיינו ללא חומר עזר.
- סימונים: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

<u>שאלה 1 (35 נקודות):</u>

יהי R יחס על הקבוצה $\mathbb{N}$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$xRy \Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{N},\ x^m=y^n .$$

א) הוכח כי R יחס שקילות.

ב) רשום במדויק את $[49]_R$.

<u>פיתרון</u>

א) צריך להראות כי R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

רפלקסיביות: צריך להראות שלכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים xRx, דהיינו קיימים $m,n\in\mathbb{N}$ כלשהם שעבורם $x^m=x^n$. אכן לכל $x\in\mathbb{N}$ קיימים $m,n\in\mathbb{N}$ כאלו, למשל $m=n=1$, ולכן xRx.

סימטריות: צריך להראות שאם xRy אז yRx. יהיו $x,y\in\mathbb{N}$ כך ש xRy, אזי קיימים $m,n\in\mathbb{N}$ כך ש $x^m=y^n$, ולכן עבור $m'=n, n'=m$ מתקיים $y^{m'}=x^{n'}$, משמע קיימים $m',n'\in\mathbb{N}$ כך ש $y^{m'}=x^{n'}$, ולכן yRx.

טרנזיטיביות: צריך להראות שאם xRy וגם yRz אז xRz. יהיו $x,y,z\in\mathbb{N}$ כך ש xRy וגם yRz, אזי קיימים $m,n\in\mathbb{N}$ ו $r,s\in\mathbb{N}$ כך ש $x^m=y^n$ וגם $y^r=z^s$. אם נעלה את השוויון הראשון בחזקת r (בשני האגפים, כמובן) אז נקבל $x^{mr}=y^{nr}$, ואם נעלה את השוויון השני בחזקת n נקבל $y^{nr}=z^{ns}$, ולכן $x^{mr}=z^{ns}$, כלומר קיימים $m',n'\in\mathbb{N}$ שעבורם $x^{m'}=z^{n'}$ ולכן xRz.

ב) צריך לרשום במדוייק את $[49]_R$.

נתחיל מכך ש $49^1 = 7^2$ ולכן $[49]_R = [7]_R$, כי R יחס שקילות.

כעת, כל מספר ששקול ל 7 יש לו רכיבים ראשוניים משותפים ל 7, אך 7 הוא ראשוני, ולכן כל מספר ששקול ל 7 הינו חזקה של 7. מאידך, כל חזקה של 7 שקולה ל 7, ולכן $[49]_R = [7]_R = \{7^n : n \in \mathbb{N}\}$.

<u>שאלה 2 (30 נקודות):</u>

תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח או הפרך:

א) $(A\times B)\cap(B\times A) = C\times C \Rightarrow A=B=C$

ב) $(A\setminus B)\times C = (A\times C)\setminus(B\times C)$

<u>פיתרון</u>

א) לא נכון! דוגמא נגדית:

הבא ניקח $A=C=\varnothing$ ו $B=\{1\}$, אזי מן הסתם לא מתקיים $A=B=C$, בעוד ש $(A\times B)\cap(B\times A) = (\varnothing\times\{1\})\cap(\{1\}\times\varnothing) = \varnothing\cap\varnothing = \varnothing = \varnothing\times\varnothing = C\times C$.

ב) נכון! הוכחה:

ראשית, נשים לב כי $(A\times C)\setminus(B\times C) = (A\times C)\cap(B\times C)^c$ וגם כי $(x,y)\in(B\times C)^c \Leftrightarrow x\notin B \vee y\notin C$. כעת,

$$(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times C)^c \Leftrightarrow ((x,y)\in A\times C)\wedge(x,y)\in(B\times C)^c)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\notin B\vee y\notin C) \Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge y\in C\wedge y\notin C)$$

אולם, $x\in A\wedge y\in C\wedge y\notin C$ זה תמיד שקר, ולכן

$$(x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge y\in C\wedge y\notin C) \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge y\in C \Leftrightarrow x\in A\setminus B\wedge y\in C \Leftrightarrow (x,y)\in(A\setminus B)\times C$$

<u>שאלה 3 (35 נקודות):</u>

בשאלה זו הקבוצה U היא קבוצת המילים הסופיות מעל הא"ב a,b,c,...,z.

מגדירים פונקציה $f:U\to U$ ע"י מחיקת כל אות שניה, לדוגמה:

$f(margolis) = mroi, \qquad f(and) = ad, \qquad f(schiff) = shf$

א) האם f היא על? אם לא, מצא דוגמה נגדית. אם כן, מצא $g: U \to U$ כך ש- $f \circ g$ היא פונקצית הזהות על U.

ב) האם f היא חח"ע? אם לא, מצא דוגמה נגדית. אם כן, מצא $g: U \to U$ כך ש- $g \circ f$ היא פונקצית הזהות על U.

<u>פיתרון</u>

א) הפונקציה f היא אכן על, וכדי להוכיח זאת מספיק להראות כי f הפיכה מימין, דהיינו קיימת $g: U \to U$ כך ש- $f \circ g$ היא פונקצית הזהות על U.

ישנן הרבה פונקציות כאלה, לדוגמא אפשר להגדיר $g: U \to U$ כך שלכל מילה $a_1a_2\ldots a_n$ נגדיר $g(a_1a_2\ldots a_n) = a_1a_1a_2a_2\ldots a_na_n$; או לחילופין, אפשר להגדיר $g: U \to U$ כך שלכל מילה $a_1a_2\ldots a_n$ נגדיר $g(a_1a_2\ldots a_n) = a_1ba_2b\ldots a_nb$.

(לצורך ההמשך ניצמד להגדרה השנייה שהצענו)

כעת

$$f \circ g(a_1a_2\ldots a_n) = f(g(a_1a_2\ldots a_n)) = f(a_1ba_2b\ldots a_nb) = a_1a_2\ldots a_n$$

ולכן $f \circ g$ היא פונקציית הזהות על U.

ב) הפונקציה f איננה חח"ע. דוגמא נגדית:

$f(ab) = a = f(a)$, כלומר ישנן שתי מילים שונות שהפונקצייה מחזירה עליהן את אותה המילה.

בהצלחה!