מבחן מועד ב' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 21/03/17

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{2x}-1\right)^7\left(\ln(e+x)\right)^2}{\left(\sin(3x)\right)^3\left(1-\cos(x)\right)^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^7}_{\to 1^7}\cdot\underbrace{(\ln(e+x))^2}_{\to 1^2}\cdot\underbrace{\left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right)^3}_{\to 1^3}\cdot\underbrace{\left(\frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)^2}_{\to 2^2}\cdot\frac{2^7}{3^3}=\frac{2^9}{3^3}$$

ב. $$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$$

נשים לב כי

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\to_{x\to\infty}0$$

ולכן

$$x\cdot\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot x=\underbrace{\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}}_{\to\frac{1}{2}}$$

הגבול האחרון הוא כיוון ש

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

סה"כ הגבול של הביטוי הוא חצי.

ג. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$$

נחשב את גבול המנה

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\to 0$$

כיוון שגבול המנה קטן מ1, הסדרה שואפת לאפס.

.2

א. חשבו את $\int x\ln(x)dx$.

$$\int x ln(x)dx = \begin{Bmatrix} f' = x & g = \ln(x) \\ f = \frac{1}{2}x^2 & g' = \frac{1}{x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx$.

יש בעייה באינסוף וגם באחד, לכן נפריד לשני תחומים.

האינטגרל כולו מתכנס אם ורק אם שני התחומים מתכנסים.

$$\int_1^e \frac{1}{x ln(x)}dx\,, \int_e^\infty \frac{1}{x ln(x)}dx$$

נתחיל מהאינטגרל $\int_1^e \frac{1}{x ln(x)}dx$, בתחום זה מדובר בפונקציה חיובית ואפשר לעשות מבחן השוואה גבולי.

כיוון שהנקודה הבעייתית אינה אפס, נזיז את האינטגרל באמצעות הצבה.

$$\int_1^e \frac{1}{x ln(x)}dx = \begin{Bmatrix} t = x - 1 \\ dt = dx \\ x = t + 1 \end{Bmatrix} = \int_0^{e-1} \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)}dt$$

נבצע השוואה עם $\int_0^1 \frac{1}{t}$ (שהוא מתבדר)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{(t+1)\ln(t+1)}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t+1} \cdot \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

האינטגרלים חברים ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר.

האינטגרל המקורי מהשאלה מתבדר בתחום $[1, e]$ ולכן סה"כ מתבדר.

למרות שסיימנו את התרגיל וגילינו כי האינטגרל מתבדר, בשביל הכיף נחקור גם את האינטגרל בתחום בהשני $[e, \infty)$

$$\int_e^\infty \frac{1}{x ln(x)}dx = \begin{Bmatrix} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{Bmatrix} = \int_1^\infty \frac{1}{t}dt$$

וזה אינטגרל מתבדר.

.3 נביט בפונקציה $f(x) = x + \frac{x}{e^x}$.

א. הוכיחו שלכל $a \in \mathbb{R}$ קיים פתרון למשוואה $f(x) = a$.

ב. הוכיחו שלכל $a \in \mathbb{R}$ קיים פתרון <u>יחיד</u> למשוואה $f(x) = a$.

סעיף א':

יהי $a \in \mathbb{R}$, נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = x(1 + e^{-x}) - a$$

נחשב גבולות בקצוות

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} x(1 + e^{-x}) - a = \{\infty(1 + 0) - a\} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} x(1 + e^{-x}) = \{-\infty(1 + \infty)\} = -\infty$$

לכן יש נקודה מעל הציר, ונקודה מתחת לציר ולפי משפט ערך הביניים כיוון שh רציפה כצירוף רציפות, הפונקציה חותכת את הציר.

סעיף ב':

$$h'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + e^{-x}(1 - x) = 1 + \frac{1 - x}{e^x} = \frac{1 - x + e^x}{e^x}$$

המכנה תמיד חיובי, לכן על מנת לדעת את סימן הנגזרת, עלינו לגלות את הסימן של המונה

$$g(x) = 1 - x + e^x$$

$$g'(x) = -1 + e^x = e^x - 1$$

הנגזרת הזו g' חיובית כאשר $x > 0$ ושלילית כאשר $x < 0$

על כן, g יורדת בתחום $(-\infty, 0]$ ועולה בתחום $[0, \infty)$ ולכן יש לה מינימום ב$x = 0$.

והרי $g(0) = 2$ ולכן $g \geq 2$ בכל הממשיים.

לכן

$$h' > 0$$

בכל הממשיים ולכן h עולה בכל הממשיים ולכן אין לה יותר מפתרון אחד.

4.

א. תהי f גזירה בקטע A המקיימת לכל $x \in A$ כי $|f'(x)| \leq 1$.

הוכיחו כי לכל שני מספרים $x_1, x_2 \in A$ מתקיים כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$.

יהיו $x_1 < x_2 \in A$ (אם הם שווים קל להראות שהתרגיל מתקיים).

f רציפה ב$[x_1, x_2]$ וגזירה ב(x_1, x_2) (כי f גזירה בכל A)

לפי לגראנז' קיימת נקודה $x_1 < c < x_2$ כך ש

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| = |f'(c)| \leq 1$$

נכפול ב$|x_2 - x_1|$ ונקבל כי

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$$

ב. תהיינה שתי סדרות a_n, b_n כך ש $a_n - b_n \to 0$.
הוכיחו כי $\arctan(a_n) - \arctan(b_n) \to 0$.

ראשית

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \le 1$$

(אין צורך בערך המוחלט כי זה אי שלילי.)

לפי סעיף א', לכל שתי נקודות x_1, x_2 מתקיים כי

$$|\arctan(x_2) - \arctan(x_1)| \le |x_2 - x_1|$$

נציב את הסדרות באי השיוויון הזה

$$|\arctan(b_n) - \arctan(a_n)| \le |b_n - a_n| \to 0$$

ולכן גם

$$|\arctan(b_n) - \arctan(a_n)| \to 0$$

לפי חצי סנדוויץ' על הרצפה.

5. תהי סדרה a_n המקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + 1 > 0$$

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

<u>אם</u> הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי כיוון שהיא עולה, נסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n^2 + a_n + 1$$

ולכן

$$L = L^2 + L + 1$$

ולכן

$$L^2 + 1 = 0$$

אין מספר ממשי שמקיים את המשוואה הזו, בסתירה, ולכן הסדרה אינה חסומה, ולכן $a_n \to \infty$

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^9}{n^{10}}$.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n+k}{n}\right)^9=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{k}{n}\right)^9$$

מדובר בסכומי רימן של הפונקציה $(1+x)^9$ הרציפה ב$[0,1]$ עם בחירת הנקודות $\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n}{n}\right\}$ ולכן סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל

$$a_n\to\int_0^1(1+x)^9dx=\begin{Bmatrix}t=x+1\\dt=dx\end{Bmatrix}=\int_1^2t^9dt=\left[\frac{t^{10}}{10}\right]_1^2=\frac{2^{10}}{10}-\frac{1}{10}=\frac{1023}{10}$$

ב. נסמן ב R_n את השגיאה של קירוב של $\sin(2)$ על ידי פולינום טיילור מסדר n של הפונקציה $f(x)=\sin(x)$ (סביב הנקודה 0). הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}R_n=0$.

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(2-0)^{n+1}$$

כעת

$$f^{(n+1)}(c)=\pm\sin(c)\ \text{או}\ \pm\cos(c)$$

בכל מקרה,

$$\left|f^{(n+1)}(c)\right|\le 1$$

מכאן

$$|R_n|\le\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוכיח שהגבול הוא אפס באמצעות כלל המנה.

(הערה: הגבול יהיה אפס לקירוב בכל נקודה לאו דווקא ב2)

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\to 0<1$$

כיוון שגבול המנה קטן מאחד, הסדרה שואפת לאפס.

ולכן לפי חצי סנדביץ (על הרצפה) מתקיים כי $R_n\to 0$.