10/07/17

פתרון מבחן מועד א' – 88-133 אינפי 2 תשע"ז

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטע הנתון

א. $e^{\sin^2(x)}$ בקטע $(-\infty,\infty)$

פתרון:

גישה אחת: מדובר בפונקציה רציפה ומחזורית בכל הממשיים ולכן רציפה במ"ש.

גישה שנייה: הנגזרת חסומה $\left|2\sin(x)\cos(x)e^{\sin^2(x)}\right| \le 2e$, ולכן הפונקציה רציפה במ"ש.

ב. x^3 בקטע $(0,\infty)$

פתרון:

נביט בשתי הסדרות $x_n = n$ ו $y_n = n + \frac{1}{n}$.

ראשית $y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$, אבל $y_n^3 - x_n^3 = \left(n+\frac{1}{n}\right)^3 - n^3 = 3n + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3} \to \infty$

2. חשבו את הביטויים הבאים:

א. $\int_0^\infty xe^{-x}dx$

פתרון:

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}dx\right) = \lim_{t\to\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(-te^{-t} - e^{-t}\right) - \left(-e^0\right) = 1$$

חישוב הגבול האחרון: $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-t} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} \underset{L'hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 0$

ב. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

פתרון:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2e$$

.3

א. תהי פונקציה f בעלת טור הפורייה $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$.

עוד נניח כי קיים $c\in\mathbb{R}$ עבורו $f(x)+c$ היא פונקציה אי זוגית.

הוכיחו כי לכל $n\geq 1$ מתקיים כי $a_n = 0$.

פתרון:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)+c-c\right)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)+c\right)\cos(nx)dx - \frac{c}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx$$

כעת $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)+c\right)\cos(nx)dx = 0$ כיוון שמדובר באינטגרל על פונקציה אי זוגית בקטע סימטרי.

וכמו כן $0 = \frac{c}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx = \frac{c}{\pi}\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}$ (שימו לב שכאן השתמשנו בעובדה ש$n\geq 1$)

ב. חשבו את טור הפורייה של ההמשך המחזורי של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ 1 & 0\le x\le\pi\end{cases}$.

פתרון: ראשית, נשים לב לעובדה ש $f(x)-\frac{1}{2}$ הינה פונקציה אי זוגית, פרט לערך שלה ב $x=0$.

כיוון שנקודה אחת אינה משנה את ערך האינטגרל, לפי ההוכחה בסעיף א' לכל $n\ge 1$ מתקיים כי $a_n=0$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1dx=1$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left.\frac{-\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n}\left(-\left(-1\right)^n-\left(-1\right)\right)$$

לכן טור הפורייה הינו

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\left(-1\right)^n\right)}{\pi n}\sin(nx)$$

4. נביט בסדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{n^2}{n^2+x^2}$

א. האם היא מתכנסת במ"ש ב $(-\infty,\infty)$?

פתרון:

ראשית, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}=1$ ולכן פונקציית הגבול היא קבועה 1.

$$d_n=\sup_{\mathbb{R}}\left|1-\frac{n^2}{n^2+x^2}\right|=\sup_{\mathbb{R}}\left(\frac{x^2}{n^2+x^2}\right)=1$$

שימו לב כי $\frac{x^2}{n^2+x^2}$ יורדת עד $x=0$ שם היא מתאפסת, ועולה לאחריו. הגבולות שלה ב $\pm\infty$ שווים 1.

לכן סה"כ $d_n\not\to 0$ ולכן סדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש.

ב.   האם לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = x$?

פתרון:

יהי $x \in \mathbb{R}$, בקטע $(0,x)$ מתקיים כי $\frac{x^2}{n^2+x^2} = \sup_{(0,x)}\left(\frac{t^2}{n^2+t^2}\right) = \sup_{(0,x)}\left|1-\frac{n^2}{n^2+t^2}\right| = d_n$

ולכן $d_n \to 0$ וסדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בקטע זה.

לכן לפי משפט $\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 1dt = x$

גישה שנייה:

$$\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}dt = n\arctan\left(\frac{x}{n}\right) = x\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \to x\cdot 1 = x$$

שימו לב ש $\lim_{t\to 0}\frac{\arctan(t)}{t} = 1$

5. תהיינה שתי פונקציות $g(x),h(x)$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$.

כמו כן הפונקציה $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in\mathbb{Q} \\ h(x) & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ אינטגרבילית רימן ב $[a,b]$.

א. הוכיחו ש $\int_a^b g(x)dx=\int_a^b h(x)dx$.

פתרון:

תהי סדרת חלוקות P_n של הקטע $[a,b]$ כך שסדרת פרמטרי החלוקה $\lambda_n\to 0$.

כיוון ש f אינטגרבילית, לכל בחירה של נקודות C_n סכומי הרימן מקיימים:

$$S^R\left(f,P_n,C_n\right)\to\int_a^b f(x)dx$$

אבל, אם נבחר נקודות רציונאליות בלבד נקבל כי $S^R\left(f,P_n,C_n\right)=S^R\left(\mathrm{g},P_n,C_n\right)\to\int_a^b g(x)dx$

ובאופן דומה אם נבחר נקודות אי רציונאליות בלבד נקבל כי $S^R\left(f,P_n,C_n\right)=S^R\left(h,P_n,C_n\right)\to\int_a^b h(x)dx$

(נתון כי h,g אינטגרביליות).

וסה"כ קיבלנו כי $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \mathrm{g}(x)dx=\int_a^b h(x)dx$

ב. נתון בנוסף כי h,g רציפות ב $[a,b]$. הוכיחו כי $h(x)=g(x)$ לכל $x\in[a,b]$.

פתרון:

לכל $x\in[a,b]$ ברור כי הפונקציות אינטגרביליות בתת הקטע $[a,x]$.

ולכן $\int_a^x h(t)dt=\int_a^x g(t)dt$.

כיוון ש h,g רציפות, פונקציות השטח שלהן הן פונקציות קדומות שלהן.

נגזור את שני הצדדים $\left(\int_a^x h(t)dt\right)'=\left(\int_a^x g(t)dt\right)'$, ונקבל $g(x)=h(x)$.