תרגול 7-אושרית

פונקציה חח"ע , על, הרכבת פונקציות ופונקציה הפיכה

הגד': יחס R מ-A ל-B נקרא **שלם** אם - $\forall a\in A \ \exists b\in B:(a,b)\in R$, בקיצור - $dom(R)=A$.

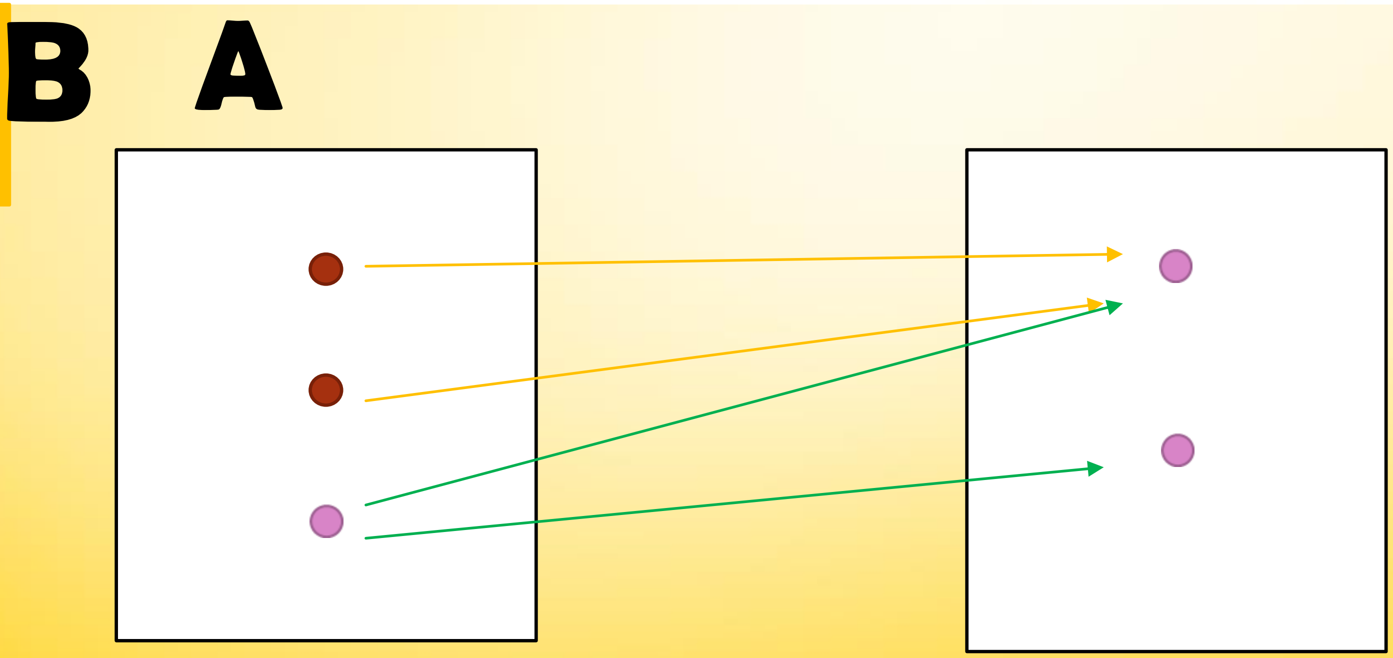
הגד': יחס R מ-A ל-B נקרא **חד ערכי** אם - $(x,b)\in R \wedge (x,d)\in R \to b=d$, כלומר - אין איבר שנשלח ל-2 מקומות.

הגד': יחס חד ערכי ושלם נקרא - **פונק'**. במקרה כזה - נהוג לסמן - במקום: $(a,b)\in R \leftrightarrow R(a)=b$.

כמו כן - נהוג לסמן את R באות f.

היחס הכתום לא שלם

היחס הירוק לא חד ערכי



סוגי יחסים חשובים מאוד:

1. יחס R מ-A ל-B נקרא על אם - $\forall b\in B\ \exists a\in A:(a,b)\in R$ כלומר - $Im(R)=B$

2. יחס R מ-A ל-B נקרא חח"ע אם - $(x,b)\in R\wedge(y,b)\in R\to x=y$ כלומר - איברים שונים (נשלחים למקומות שונים).

~~[illegible]~~ במקרה הפרטי של פונק': $f:A\to B$

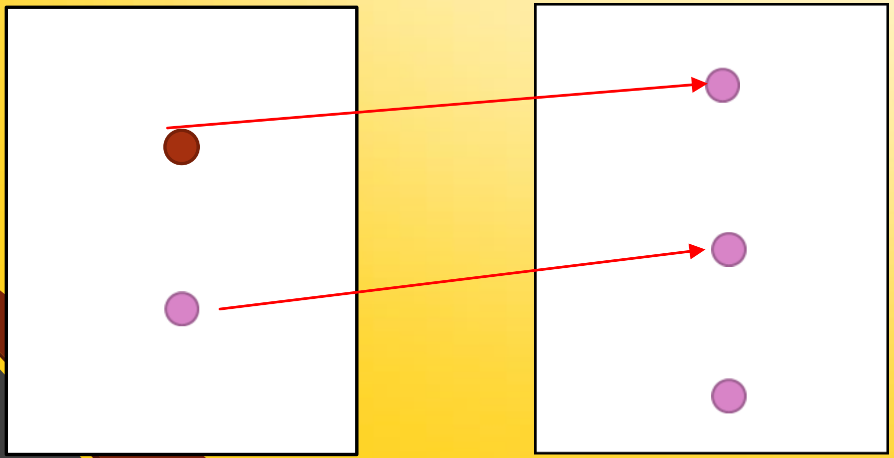
1. f חח"ע $\iff f(x_1)=f(x_2)\to x_1=x_2 \iff x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2)$

2. f על $\iff$ לכל $\overset{\text{איבר בטווח}}{b\in B}$ קיים $\overset{\text{מקור}}{a\in A}$ כך ש- $f(a)=b$ $\iff Im(f)=B$.

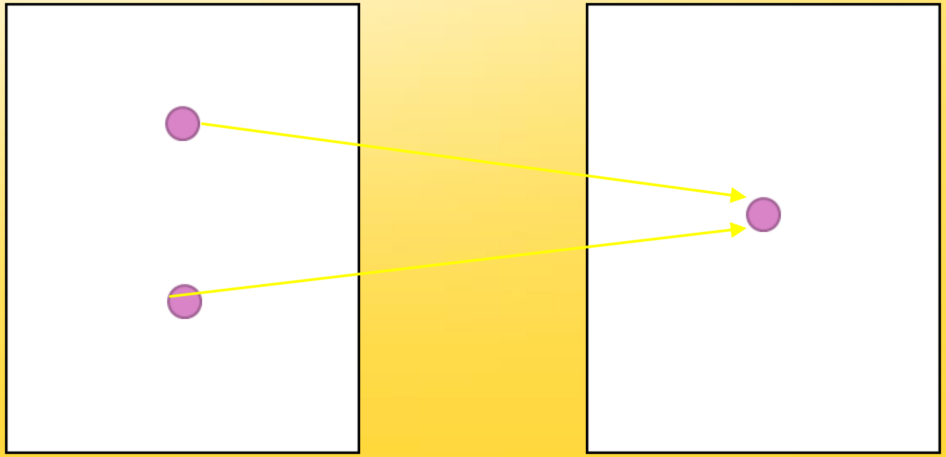
הגד: תהא A קב'. פונקציית הזהות היא פונק' $f:A\to A$ המקיימת $\forall a\in A: f(a)=a$. מסומנת: id_A

הערה: פונק' הזהות חח"ע ועל

חח"ע ולא על



לא חח"ע ועל



1. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ כאשר - $f(p)=p^2$ ← **פתרון:** לא חח"ע $f(1)=1=f(-1)$ לא על - ל-(1-) אין מקור.

2. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כאשר $f(p)=p^2$ ← **פתרון:** לא על - ל-(1-) אין מקור. **חח"ע:** ~~[illegible]~~ יהיו מצבים כך ש-

$f(a)=f(b)\to a^2=b^2\to a=b$ ✓

$\downarrow$ $a=-b$] לא אפשרי כי - שני (מס' חיובי)

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כאשר $f(x)=x-1$ ← **פתרון:** חח"ע ועל.

הפיכה: $\boxed{\text{שפ"מ}}$

הוכחה: נספח

כל איבר נשלח לעצמו

טווח תחום

4. תהא $A \subseteq B$. אזי הפונק' $i:A\to B$ המוגדרת $i(a)=a$ נקראת פונק' ההכלה.

← פונק' ההכלה חח"ע. הוכחה: יהיו $a,b\in A$ כך ש- $i(a)=i(b)$, ונקבל מהגדרה כי $a=b$.

$a=b$ ✓ אכן מתקיים.

← על: תלוי אם $A\subseteq B$ ושווה ל-B זו פונק' הזהות והיא על. אחרת - קיים $b\in B$ כך ש $b \notin A$ ובמקרה זה ל-b הנ"ל - אין מקור.

תרגיל: מצאו פונק' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ על שאינה חח"ע.

פתרון: נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$f(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ f(n)=n-1 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נראה שהפונק' שהגדרנו מקיימת את תנאי השאלה. הוכחה - f לא חח"ע כי $f(1)=1=f(2)$. $1\neq 2$

נראה ש- f על: יהי $a\in\mathbb{N}$ ונראה כי קיים לו מקור - $a+1\in\mathbb{N}$ הוא מקור ל- a

$f(a+1)=a+1-1=a$ ✓

תרגיל:

נתונה הפונק' $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ שמוגדרת באופן הבא: $f(x)=\lfloor x\rfloor$ האם חח"ע? האם על?

תזכורת: חלק שלם של x מעוגל כלפי מטה.

פתרון: (1) חח"ע ← לא חח"ע. **הסבר:** $f(1)=\lfloor 1\rfloor=1$, $f(1.5)=\lfloor 1.5\rfloor=1$ באופן ש- $1\neq 1.5$.

(2) על ← כן על. **הסבר:** לכל $z\in\mathbb{Z}$ קיים מקור z כך ש- $f(z)=\lfloor z\rfloor = z$

הרכבת פונק':

הגד': יהיו $f:A\to B$, $g:B\to C$ שתי פונק' אז **ההרכבה של g על f** היא פונק' $g\circ f$ כך ש- $g\circ f:A\to C$

מוגדרת ע"י הכלל- $(g\circ f)(a)=g(f(a))$

דוגמא: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$

1. חשבו את $f\circ g$
2. חשבו את $g\circ f$.

פתרון:

1. $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f\circ g(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+1$
2. $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g\circ f(x)=g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2$

תכונות פעולת ההרכבה:

1. הרכבה לא בהכרח חילופית- כמו דבר שאינו, כלומר $g\circ f\neq f\circ g$.
2. הרכבה היא קיבוצית כלומר- $f_3\circ(f_2\circ f_1)=(f_3\circ f_2)\circ f_1$

תרגיל:

נניח $g \circ f$ חח"ע. הוכח/הפרך - א. g חח"ע ב. f חח"ע.

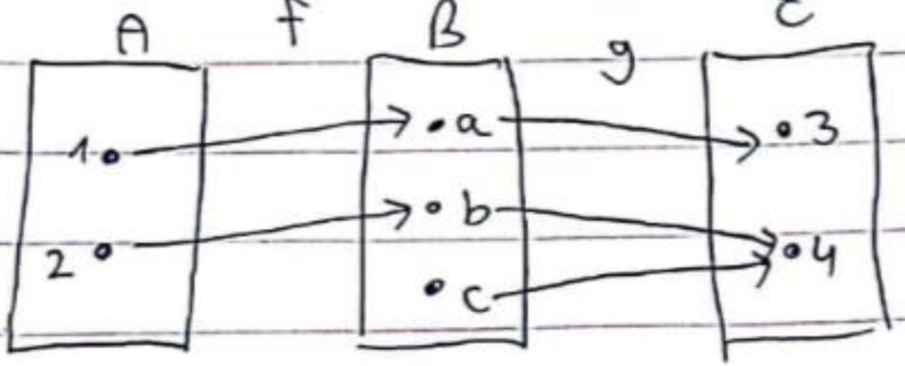
פתרון:

א. לא נכון! **דוגמה נגדית:**

$A=\{1,2\}$ $B=\{a,b,c\}$ $C=\{3,4\}$

$$\left.\begin{array}{l} f:A\to B \\ f(1)=a \\ f(2)=b \end{array}\right\} \to \text{חח"ע - ברור}$$

$$\left.\begin{array}{l} g:B\to C \\ g(a)=3 \\ g(b)=g(c)=4 \end{array}\right\} \to \text{לא חח"ע - ברור}$$



נראה (נחשב) את $g\circ f$.

$g\circ f: A\to C$ המוגדרת ע"י:

$$g\circ f \text{ חח"ע כדרוש.} \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} (g\circ f)(1)=g(f(1))=g(a)=3 \\ (g\circ f)(2)=g(f(2))=g(b)=4 \end{array}\right.$$

ב. נכון. **הוכחה:** נניח ש- f לא חח"ע. לכן קיימים x,y כך ש- $\underbrace{f(x)=f(y)}_{(*)}$ אבל- $x\neq y$.

נפעיל g על $(*)$ ונקבל - $g(f(x))=g(f(y))$

לפי הג' הרכבה: $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(y)$

כלומר קיבלנו ש קיימים $x\neq y$ כך ש- $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$

וסתירה! לכן ש- $g\circ f$ חח"ע

תרגיל:

נניח $g\circ f$ על. הוכח/הפרך: 1. g על 2. f על.

פתרון:

א. נכון **הוכחה:** $g\circ f$ על נתון ונסמן $\underbrace{g\circ f: A\to B}_{\text{שיהיה נוח לדבר}}$. לפי הג' פונק' על נקבל כי לכל איבר $b\in B$ קיים איבר $a\in A$ כך ש- $g(f(a))=b$. לכן - עבור הפונק' g נקבל כי לכל $b\in B$ קיים מקור ($f(a)$) שמעתיק את b ע"י הפונק' g. $\Leftarrow$ g על. מש"ל

ב. לא נכון **דוג' נגדית:** אותה דוג' נגדית של התרגיל הקודם סעיף ב.

f לא על ← ל- c אין מקור

$g\circ f$ על ← ל-3 יש מקור ← 1 ל-4 יש מקור ← 2.

פונק' הפיכות:

הגד': תהי f פונק' $f:A\to B$, $g:B\to A$ תקרא הפונק' ההופכית ל-f אם $f\circ g=Id_B$ וגם $g\circ f=Id_A$ במקרה זה נסמן את g ע"י f^{-1} ונאמר שהפונק' f - היא הפיכה

הערה: בשונה מההגד' של היחס ההופכי שמוגדר תמיד, הפונק' ההופכית לא תמיד קיימת, אלא - רק - כשה-f פונק' (חח"ע ועל)
f הפיכה $\Longleftrightarrow$ f חח"ע ועל.

דוג' לפונק' הפיכה:

1. $f(x)=x+1$ הפיכה. נמצא הופכית.

$y=x+1$ ← ננסה לחלץ את x כפונק' של y וזו ההופכית

$y-1=x$

$\Leftarrow$ $f^{-1}(x)=x-1$

נבדוק ונראה שאכן הופכית

$f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(x+1)=(x+1)-1=x$ ✓

$f\circ f^{-1}(x)=f(x-1)=(x-1)+1=x$ ✓

עוד דוג' לפונק' הפיכה והפכיות:

2. $f(x)=x^3$ הפיכה (מוצאים ובודקים בקלות)

נמצא את הפונק' ההופכית $y=x^3$ ← $\sqrt[3]{y}=x$ ← $g(x)=\sqrt[3]{x}$

נבדוק שאכן הופכית:

$g\circ f(x)=g(x^3)=\sqrt[3]{x^3}=x$

$f\circ g(x)=f(\sqrt[3]{x})=(\sqrt[3]{x})^3=x$

תרגיל: קבעו האם הפיכה ואם כן - מצאו - הופכית.

$f(x)=\sin x$

פתרון: לא הפיכה - כי לא חח"ע. $\sin(0)=\sin(\pi)$

תרגיל:

תהי A קב' נגדיר $f:P(A)\to P(A)$

$f(B)=B^c$

האם הפיכה ומצאו הופכית.

פתרון: כן **טענה:** $g(B)=B^c$ $g:P(A)\to P(A)$ היא ההופכית שלה

$(f\circ g)(B)=f(g(B))=f(B^c)=(B^c)^c=B$ ✓ $(g\circ f)(B)=g(f(B))=g(B^c)=(B^c)^c=B$ ✓

טענה נוספת לכל פונק' f מתקיים: $f\circ id = f \quad \wedge \quad id\circ f = f$

אפיון:

f הפיכה $\leftrightarrow$ f חח"ע +על.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח כי f הפיכה אזי - קיימת g כך ש- $f\circ g = Id \Leftarrow Id$ על $\Leftarrow$ f על.

ראינו מקודם. המקור הגדול

$g\circ f = Id \Leftarrow Id$ חח"ע $\Leftarrow$ f חח"ע.

ראינו מקודם. המקור הגדול

$\Rightarrow$ נניח: $f:A\to B$ חח"ע + על, נבנה לה פונק' הפכית.

יהי: $b\in B$. f על ולכן- קיים לו מקור $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$.

אבל- f חח"ע ולכן- ה-a הנ"ל (הזה) - יחיד.

כלומר לכל b קיים a יחיד כך ש- $f(a)=b$.

לכן: נגדיר- $g:B\to A$ להיות $g(b)=\underline{a}$ כלומר- כל b נשלח ל-a שהוא- המקור שלו.

תרגיל: הוכח אם קיימת הופכית היא יחידה.

הוכחה: נניח כי h,g הופכיות של f אזי-

לפי הערה

$$h = h \circ I_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = I_A \circ g = g$$

לפי הגדרה מהיות g הופכית מימין

אסוציאטיביות

מהיות h הופכית

לפי הערה

משל

תרגיל: הוכח כי אם $g\circ f\circ g = id$ אז f- הפיכה.

פתרון: id ← פונק' הזהות ← id חח"ע

id על

$(g\circ f)\circ g = \underbrace{id}_{חח"ע}$ ← g חח"ע.

$g\circ(f\circ g) = \underbrace{id}_{על}$ ← g על.

סה"כ - נקבל - g חח"ע+על ← g הפיכה.

ראינו כי לפונק' הפיכה הפכית יחידה.

מצד 1 - $g\circ f$ הפכית של g. מצד 2 - $f\circ g$ הופכית של g.

לכן - $g\circ f = f\circ g$.

נבדוק ונקבל - ~~$(g\circ f)\circ g = f\circ(g\circ g) = id$~~ $(g\circ f)\circ g \underset{הצבה}{=} (f\circ g)\circ g \underset{אסוציאטיבי}{=} f\circ(g\circ g) = \underbrace{id}_{על}$

f על

$g\circ(f\circ g) \underset{הצבה}{=} g\circ(g\circ f) \underset{אסוציאטיביות}{=} (g\circ g)\circ f = \underbrace{id}_{חח"ע}$

f חח"ע

סה"כ - f חח"ע+על ← f הפיכה.

או-לחילופין - קיום הג' פונק' הפיכה וההופכית שלה (וזו - $g\circ g$

מסקנות סימונים:

1. אם g,f הפיכות אז: $f \circ g$ הפיכה

2. אם $f \circ g$ הפיכה $\Leftarrow$ g על ו-f חח"ע.

בהצלחה!!!