פונקציות

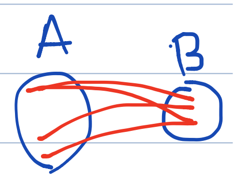
הגדרה: יהיו A,B קבוצות וR יחס בינהן. אזי:

- התחום של R הינו $dom(R) = \{a \in A | \exists b \in B : (a, b) \in R\} = \{(*,\ ), (*,\ ) \dots\}$
- התמונה של R הינה $im(R) = \{b \in B | \exists a \in A : (a, b) \in R\} = \{(\ , *), (\ , *) \dots\}$

הערה: ישירות מהגדרה מתקיים כי $dom(R) \subseteq A, Im(R) \subseteq B$

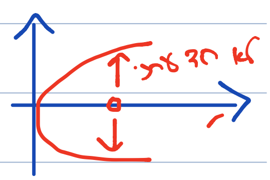
דוגמא:

- אם R יחס מלא על A אזי האיחוד של התמונה והתחום שווה A (כי כל שני איברים ניתן להשוות)
- $R = \{(1, a), (2, b), (3, a), (a, 1)\}$ אזי התחום הוא $dom(R) = \{1,2,3,a\}$ והתמונה הינה $im(R) = \{a,b,1\}$



הגדרה:

- יחס R מ-A ל-B נקרא **על** אם $im(R) = B$ כלומר $\forall b \in B \exists a \in A : (a, b) \in R$
- יחס R מ-A ל-B נקרא **שלם** אם $dom(R) = A$ כלומר $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in R$
- יחס R נקרא **חד ערכי** אם $(d = b) \rightarrow [(x, d) \in R] \wedge [(x, b) \in R]$ כלומר אין איבר שנשלח ל-2 מקומות שונים
- יחס R נקרא **חד-חד ערכי** אם $(x = y) \rightarrow [(y, b) \in R] \wedge [(x, b) \in R]$ כלומר איברים שונים נשלחים למקומות שונים (כלומר, היחס ההופכי הינו חד ערכי)



$R^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in R\}$

הגדרה:

יחס חד ערכי ושלם נקרא **פונקציה**; נסמן במקרה זה $(a, b) \in R \leftrightarrow b = R(a)$. ובאופן כללי $a \mapsto f(a)$, $f : A \rightarrow B$. A נקרא תחום (הגדרה) של הפונקציה. ו B נקרא הטווח של הפונקציה)

נחזור על הגדרת חח"ע עבור פונקציה:

f חח"ע אמ"מ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ אמ"מ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

הגדרה:

תהא A קבוצה. **פונקציית הזהות** היא פונקציה $f : A \rightarrow A$ המקיימת $\forall a \in A : f(a) = a$.

נהוג לסמנה: id_A פונקציית הזהות היא חח"ע ועל.

תרגיל: תהיינה $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך ש $f(n) = g(3n-1)$

הוכיחו ש f על $\rightarrow$ g לא חח"ע.

פתרון:

$g(1) = k \in \mathbb{N}$

$\exists n \in \mathbb{N} : f(n) = k \longrightarrow g(3n-1) = k$

$k = g(1) = g(3n-1)$

אם g הייתה חח"ע $1 = 3n-1$, לא קיים $n \in \mathbb{N}$ שמקיים זאת, בסתירה

הרכבת פונקציות

הגדרה: יהיו $f : A \to B, g : B \to C$ שתי פונקציות אזי **ההרכבה של** g **על** f היא פונקציה $g \circ f : A \to C$ המוגדרת על ידי הכלל $g \circ f(a) = g(f(a))$

תכונות:

1. הרכבה היא קיבוצית. כלומר $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$
2. הרכבה **אינה** (בהכרח) חילופית כלומר לא מתקיים בהכרח כי $f_2 \circ f_1 = f_2 \circ f_1$. למשל $f(x) = x^2, g(x) = x + 1$ אזי $f(g(2)) = f(3) = 9, g(f(2)) = g(4) = 5$ ולכן $f \circ g \neq g \circ f$

תרגיל

תהא $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י $F(f) = g \circ f$. הוכיחו כי F חח"ע אמ"מ g חח"ע.

פתרון

$\boxed{\Leftarrow}$ נתון F חח"ע נניח $\exists n, m : g(n) = g(m)$ ניקח את הפונקציות הקבועות הבאות:

$f \equiv n , f' \equiv m$

$f, f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} : f(x) = n , f'(x) = m$

$F(f) = g \circ f = g(n) = g(m) = g \circ f' = F(f')$

כיוון ש F חח"ע. $F(f) = F(f') \leftarrow f = f' \leftarrow \boxed{n = m}$

$\boxed{\Rightarrow}$ נתון g חח"ע. $f \neq f' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כלומר $\exists n \in \mathbb{N}\ f(n) \neq f'(n)$ נרכיב את g: כיוון ש g חח"ע:

$F(f) \neq F(f') \leftarrow g \circ f(n) \neq g \circ f'(n)$ $\quad (f(x) \neq f(y) \Leftrightarrow x \neq y)$

כאשר f חח"ע

הוכחנו: חח"ע כי הוכחנו שאיברים שונים נשלחים לתמונות שונות.

תרגיל

א • נניח $g \circ f$ חח"ע. הוכח/הפרך: g חח"ע, f חח"ע

ב • נניח $g \circ f$ על. הוכח/הפרך: g על, f על

פתרון

(א) נתחיל בלהוכיח f חח"ע.

$g \circ f$ חח"ע. נניח בשלילה f לא חח"ע $\exists x \neq y \quad f(x) = f(y)$

אבל $g(f(x)) = g(f(y))$ ונתון $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ שהרכבה חח"ע

ולכן $x = y$ סתירה.

g חח"ע (ראה דוגמא נגדית) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$ חח"ע, $g(y) = y^2 \to$ לא חח"ע $g(1) = g(-1)$, $h = g \circ f = e^{2x} \to$ חח"ע

(ב) $g \circ f$ על

ניתן דוגמא נגדית ל-f: $f, g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$

$f(n) = n+1, \quad g: \begin{cases} 0 & n = 0 \\ n-1 & else \end{cases}$

$g \circ f(n) = n$

זהות

נוכיח g על: נסמן $g \circ f : A \to B$. ידוע $g \circ f$ על.

לכל איבר $b \in B$ קיים איבר $a \in A$ $g(f(a)) = b$. עבור g לכל b

קיים $f(a)$ שנשלח ל-b תחת g ולכן g על.

פונקציות הפיכות

$f: A\to B$

$id_B\circ f = f\circ id_A = f$

הערה: לכל פונקציה f מתקיים $f\circ id = f$ וגם $id\circ f = f$

הגדרה: תהי f פונקציה $f: A\to B$. פונקציה $g: B\to A$ תיקרא **הפונקציה ההופכית ל-** f אם $f\circ g = id_B$ וגם $g\circ f = id_A$. במקרה זה נסמן את g על ידי f^{-1}, ונאמר שהפונקציה f היא **הפיכה**.

$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$

הערה: זכרו שפונקציה היא יחס. הפונקציה ההופכית שלה היא היחס ההופכי מטבע הדברים. על מנת שהיחס ההופכי יהיה פונקציה הוא צריך להיות חח"ע ושהתחום שלו יהיה כל B. תנאים אלה מתממשים רק אם f הינה חח"ע ועל.

משפט

הוכח כי f הפיכה אם"ם היא חח"ע ועל. כמו כן, הוכח שאם קיימת הופכית אזי היא יחידה.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$ נתון f הפיכה. $\exists f^{-1}: f^{-1}\circ f = id_A,\ f\circ f^{-1} = id_B$

פונק' הזהות היא חח"ע וגם על ולכן לפי התרגיל הקודם שפתרנו, f חח"ע ועל.

$\boxed{\Rightarrow}$ נתון f חח"ע ועל. נגדיר $g: B\to A$ באופן הבא:

עבור $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד כך ש- $f(a)=b$ $\qquad g(b):=a$

f על, f חח"ע

(שים לב ש-g אכן פונקציה — הוגדרה לכל b בזכות העל של f

מוגדרת באופן חד-ערכי בזכות החח"ע של f)

(נסו בבית להראות שאכן $g\circ f = Id$, $f\circ g = id$)

הערה:

$f: A\to B$

$C\subseteq B$

$y\in B$

$f^{-1}(y)$ פונקציה הופכית

$f^{-1}(C) \leftarrow$ תמונה הפוכה

נוכיח יחידות: נניח g,h הופכיות ל-f

$$h = h\circ Id_B = h\circ \underbrace{f\circ g}_{Id_B} = Id_A\circ g = g$$

דרך אחרת: נניח בשלילה $h\neq g$ הופכיות ל-f. כיוון ששונות, הן חייבות להיות שונות על איבר אחד לפחות $\exists x\in A: g(x)\neq h(x)$ $\quad f(g(x))\neq f(h(x))$ בסתירה לחח"ע

קיבלנו תמונה זהה משני איברים שונים בסתירה לחח"ע של f $\quad x = x$

משפט

יהיו $f_1, \dots f_k : A \to A$ הפיכות/חח"ע/על. הוכח שההרכבה $f_k \circ \cdots \circ f_1$ הפיכה/חח"ע/על

הוכחה

חח"ע: $f_1 \dots f_k$ חח"ע (נתון), נניח $f_k \circ \dots \circ f_1(x_1) = f_k \circ \dots \circ f_1(x_2)$

$f_k(f_{k-1} \circ \dots \circ f_1)(x_1) = f_k(f_{k-1} \circ \dots \circ f_1)(x_2)$ ידוע f_k חח"ע $\Leftarrow$

$f_{k-1} \circ \dots \circ f_1(x_1) = f_{k-1} \circ \dots \circ f_1(x_2)$

ממשיכים ככה (ניתן גם באינדוקציה) עד שמגיעים ל- $x_1 = x_2$. $\square$

על: נתון $f_1, \dots f_k$ פונקציות על. f_k הוא על. (יהי $y \in A$) קיים $a_k \in A$ $f_k(a_k) = y$

f_{k-1} היא על לכן קיים $a_{k-1} \in A$ $f_{k-1}(a_{k-1}) = a_k$

f_{k-2} על $\Leftarrow$ $\exists a_{k-2} \in A$ $f_{k-2}(a_{k-2}) = a_{k-1}$

$$(f_k \circ \dots \circ f_1)(a_1) = (f_k \circ \dots f_2)(a_2) = \dots = f_k \circ f_{k-1}(a_{k-1}) = f_k(a_k) = y$$

הראנו שלכל y יש מקור תחת הרכבת הפונקציות לכן $f_k \circ \dots \circ f_1$ על $\square$

הפיכות: נובע מחח"ע ועל.

מסקנות

- אם f, g הפיכות אז $g \circ f$ הפיכה.
- אם $g \circ f$ הפיכה אז f חח"ע, g על (והן לאו דוקא הפיכות).

דוגמאות

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת:
   1. $f(x) = x + 1$ הפיכה וההופכית היא $f^{-1}(x) = x - 1$
   2. $f(x) = x^3$ הפיכה וההופכית היא $f^{-1}(x) = x^{1/3}$
   3. $f(x) = \sin(x)$ אינה הפיכה כי איננה חח"ע למשל $\sin(0) = \sin(2\pi k)$

2. תהא A קבוצה $f : P(A) \to P(A)$ המוגדרת:
   1. $f(B) = B^c$ הפיכה וההופכית היא $f^{-1}(B) = B^c$
   2. תהא $C \subseteq A$ תת קבוצה $f(B) = B \triangle C$ הפיכה וההופכית היא $f^{-1}(B) = B \triangle C$

$A = \{1,2,3\}$

$f(\{1,2\}) = \{3\}$

$f^{-1} = f$

$f^{-1}\{3\} = \{1,2\} = \{3\}^c$

$C = \{1,2\}$

$f(\{2,3\}) = \{2,3\} \triangle \{1,2\} = \{1,3\}$

$\{1,3\} \triangle \{1,2\} = \{2,3\}$

3. תהא A קבוצה ו $C \subseteq A$ תת קבוצה. נגדיר $f : P(A) \to \{0, 1\}$ ע"י:

$$f(B) = \begin{cases} 1 & \text{if } C \subseteq B \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

תקיים כי $f(C) = f(A)$ ואם $C \neq A$ אזי הפונקציה אינה חח"ע ובפרט אינה הפיכה

4. תהא A קבוצה. אזי אפשר (בעזרת חומר שראינו בתירגול על יחסי שקילות) להגדיר $f : \{R \mid R \text{ Equivalence relation}\} \to \{\text{Partitions of } A\}$ ע"י $f(R) = A/R$ והיא תהיה חח"ע ועל כי ראינו את הפונקציה ההופכית לה

5. $g : \{4, 5, 6\}^{\{1,2,3\}} \to \{4, 5, 6\} \times \{4, 5, 6\} \times \{4, 5, 6\}$ המוגדרת $f \mapsto (f(1), f(2), f(3))$ חח"ע ועל.

$f \in \{4,5,6\}^{\{1,2,3\}}$

$f(1) = 4$ $f(2) = 5$ $f(3) = 6$ $f \mapsto (4,5,6)$

$h \in \{4,5,6\}^{\{1,2,3\}}$

$h(1) = 4$ $h(2) = 4$ $h(3) = 6$

$h \to (4,4,6)$

תרגיל

הוכח כי אם $g \circ f \circ g = id$ אז f הפיכה

הוכחה:

ידוע שהרכבת פונקציות אסוציאטיבית

$(g \cdot f) \cdot g = g \cdot f \cdot g = g \cdot (f \cdot g)$

$(g \cdot f) \cdot g = id \leftarrow g$ חח"ע

$g \cdot (f \cdot g) = id \leftarrow g$ על

לכן g חח"ע ועל הפיכה "נרכיב" g^{-1} מימין ומשמאל

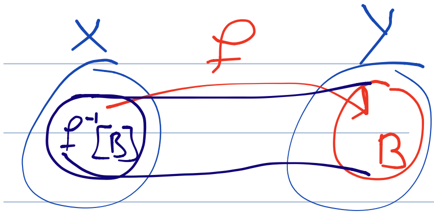
$\underbrace{g^{-1} \cdot g}_{Id} \cdot f \cdot \underbrace{g \cdot g^{-1}}_{Id} = g^{-1} \cdot g^{-1} \longrightarrow f = g^{-1} \cdot g^{-1}$

f הרכבה של פונקציות הפיכות לכן הפיכה.

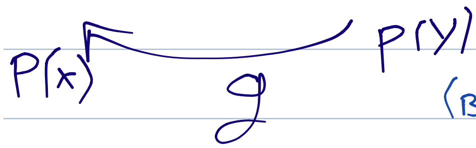
תרגיל ממבחן (קצת משודרג)

יהיו X,Y שתי קבוצות, ותהי $f: X\to Y$ פונקציה כלשהי. נגדיר את הפונקציה $g: P(Y)\to P(X)$ על ידי $g(B)=f^{-1}(B)$. בדוק את הקשר בין החח"ע/על של f לבין אלה של g. (כלומר, מה גורר את מה בהכרח).

פתרון.



נתחיל בהוכחה f על $\Longleftrightarrow$ g חח"ע.



$\boxed{\Leftarrow}$ נתון f על.

נניח $g(B)=g(A)$ (כדי להוכיח חח"ע נראה $B=A$)

$f^{-1}[B]=f^{-1}[A]$ נפעיל את f על שני הצדדים

$$B=f[f^{-1}[B]]=f[f^{-1}[A]]=A$$

$\boxed{\Rightarrow}$ g חח"ע. נניח בשלילה f לא על $\exists y\in Y\ \forall x\in X: f(x)\neq y$

לכן: $f^{-1}[Y]=f^{-1}[Y\setminus\{y\}]$

$g(Y)=g(Y\setminus\{y\})$ בסתירה לחח"ע של g

נוכיח f חח"ע $\Longleftrightarrow$ g על.

$\boxed{\Leftarrow}$ נתון f חח"ע יהי $A\in P(X)$

לכן המקור של A יהיה $f(A)$.

$$g(f(A))=f^{-1}(f(A))=A$$

כיוון f חח"ע יש שוויון (כשאין שוויון יש הכלה)

$\boxed{\Rightarrow}$ נתון g על. נניח בשלילה f לא חח"ע. קיימים $x,y\in X$ שונים $f(x)=f(y)$ $\qquad f: X\to Y$

נבחר בנקודה $A=\{x\}$ כיוון ש-g על קיימת $B\subseteq Y$ $(B\in P(Y))$ $\qquad g:P(Y)\to P(X)$, $g(B)=f^{-1}(B)$

$$f^{-1}(B)=g(B)=A=\{x\}$$

$$\{f(x)\}=f(A)=f(f^{-1}(B))\subseteq B$$

נסתכל על התמונה ההפוכה של $\{f(x)\}$

$$\{x,y\}\subseteq f^{-1}(\{f(x)=f(y)\})=f^{-1}(\{f(x)\})\subseteq f^{-1}(B)=g(B)=A=\{x\}$$

$\{x,y\}\subseteq\{x\}\longrightarrow x=y$ בסתירה להנחה

(נשים לב "ייתכן" f חח"ע ו g לא על
g חח"ע f לא על)

$g:P(Y)\to P(X)$ $\quad g(\{0\})=f^{-1}(\{0\})=\mathbb{Z}$ $\quad g(\emptyset)=\emptyset \longrightarrow$ g חח"ע

$P(Y)=\{\emptyset,\{0\}\}$ $\quad f: \mathbb{Z}\mapsto 0$ (לא חח"ע) $\quad f: X\to Y$ $\quad X=\mathbb{Z},\ Y=\{0\}$